

Exposé devant les Gagnants du Concours du Tournoi régional des équipes lycéennes Île- de-France de Mathématiques¹ Ecole Centrale, 2 Avril 2017

Mesdemoiselles, Messieurs, chers jeunes Collègues,

Permettez-moi tout d'abord de remercier Animath, Martin Andler et Antoine Martin, et toute l'équipe de mathématiciens qui font vivre avec succès cette association, pour leur invitation à faire cet exposé sur un sujet qui, jusqu'à présent, n'entraîne que très rarement dans la réflexion des pédagogues sur le contenu et la pratique des enseignements, y compris ceux des mathématiques. Il s'agit du lien entre les arts et les différentes disciplines, pour nous celui de l'art visuel en particulier avec les mathématiques. Si ce lien est avéré, consistant, solide, ce qu'il faut prouver, ne conviendrait-il pas alors de le mettre en valeur à des fins pédagogiques, à des fins de recherche et de développement, pour également apporter à nos artistes des éléments nouveaux qui pourraient enrichir leurs créations. Ce premier propos établit la trame de l'exposé.



¹ Cf <http://www.animath.fr/spip.php?article2939>
[NoAEMfAaCW6sIxo#pdfviewer](http://www.animath.fr/spip.php?article2939)

<https://drive.tfjm.org/index.php/s/>

Entrons tout de suite dans le vif du sujet. Voici un premier tableau:

Il appelle quelques remarques évidentes, subjectives pour certaines d'entre elles. Se dégage une impression de calme et de sérénité, créée d'abord, non seulement par l'absence apparente de tout mouvement, par une forme d'immobilité temporelle, par le caractère momentanément figé qui accompagne la prise de vue instantanée de l'artiste sur le spectacle qui s'offre à son regard, mais aussi plus subtilement par la dimension même du tableau, allongé, parfaitement assis sur sa base horizontale: une impression de stabilité donc, terme associé à une notion fondamentale, car sous couvert de déformation, de bifurcation, souvent d'approximation, et en tout cas d'invariant, forme extrême de la stabilité, vous aurez presque constamment, de manière consciente ou non, à manier ce concept, à le faire fructifier.

Cette impression et cette stabilité sont ici fortement liées au presque équilibre entre les masses et les personnages situés de part et d'autre d'un axe de symétrie vertical, également mis en avant par un jeu de couleurs presque complémentaires. Comme vous le savez la symétrie, et la rupture de symétrie sont des concepts parmi les plus productifs en physique notamment.

La construction du tableau repose sur des formes fondamentales élémentaires: deux portions de plans au niveau horizontal, des parallélépipèdes à droite qui donnent son assise stable au bâtiment, et par induction au personnage qui l'accompagne, à gauche dans la partie supérieure, ces pins élancés, des éléments cylindriques fins surmontés de cônes allongés. Ils apportent une touche dynamique à cette vision d'ensemble, accentuée par le jeu de la main et des doigts porteurs d'une information semble-t-il importante, faisant presque face à la main qui reçoit la nouvelle.

Remarquez également la singularité essentielle du tableau, en haut et au centre, sur l'axe de symétrie, le point de fuite lumineux, d'une luminosité éclatante, créée par le blanc intense qui concentre l'infinité « additive » du spectre des couleurs, et contribue à faire naître en nous un sentiment d'une infinité analogue, aussi lointaine qu'ici merveilleuse, réconfortante. Il est bien établi que le regard qui se porte sur un décor n'est pas du tout immobile. Il parcourt rapidement ce que j'ai appelé le squelette du percept, un graphe dont les sommets sont des points singuliers du décor observé. Ces points singuliers sont ici, non seulement le point de fuite, mais aussi les centres des visages, les barycentres des mains, les sommets des pins. Leur nombre est fini.

Cet exemple illustre un théorème central des mathématiques: les points singuliers d'un décor, d'un objet mathématique forment un ensemble rare, un ensemble de mesure nulle. Et pourtant ce sont les points de l'objet le plus chargés de signification, porteurs des plus grandes potentialités. Ils possèdent des propriétés d'extrémalité qu'il convient de mettre en évidence et d'exploiter.

Ainsi ce simple et rapide examen du tableau nous a permis de mettre en lumière deux concepts importants, ceux de stabilité et de symétrie, de mettre en lumière également un théorème mathématique de grande portée, tant par sa généralité que par la signification de son contenu.

La connaissance de ces seules données est déjà un atout de premier ordre pour guider la manière dont nous observons et comprenons le monde.

L'auteur de cet tableau est né en 1452, près de de Florence, dans un lieu dénommé Vinci. Son prénom est ... Léonard.



Da Vinci. Annunciazione. 1475-1480

Le grand Léonard donc énonçait dans l'article 44 de son Traité de la Peinture [5] que « La science de la peinture traite de toutes les couleurs des surfaces et de la forme des corps », une conception que, vers la fin de sa vie, partageait par exemple le peintre russe Kasimir Malevitch [4]. On peut alors définir l'art visuel ainsi: un art de représentation matérialisée, caractérisé par la présence fondatrice de la couleur et de la forme. Couleur précède forme car pas de forme visible sans couleur.

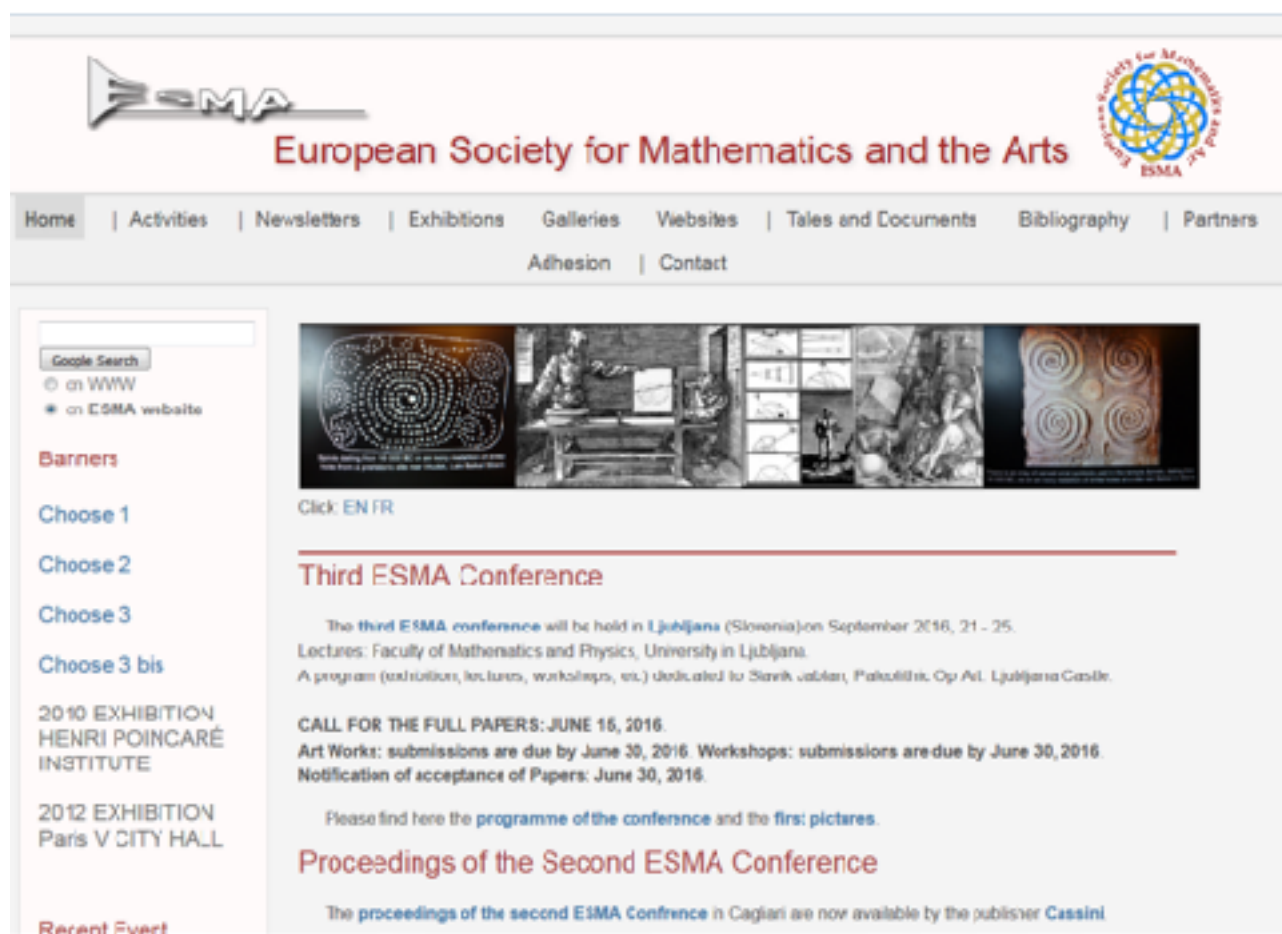
Qui dit forme pense aussitôt à géométrie et topologie. Vinci suivait exactement la même démarche de pensée: « Le premier élément de la science de la peinture est le point, le deuxième en est la ligne, le troisième la surface, le quatrième le volume, qui s'habille de la surface » (premier article de la deuxième partie de son traité).

Qui dit couleur pense à la vibration lumineuse, sa fréquence, sa stabilité qu'exprime le mouvement périodique uniforme à travers le temps et donc, du point de vue de la mathématique qui représente ces phénomènes, qui dit couleur pense d'une part à la théorie des nombres et à ses périodicités secrètes qui s'étalent, se lissent au fur et à mesure qu'on s'éloigne vers l'infini, et d'autre part à l'analyse.

Enfin qui dit représentation matérialisée pense aujourd'hui à ces outils que sont l'impression sur papier ou en 3D, à l'animation visible sur l'écran de l'ordinateur, autrement dit à l'informatique.

Conclusion de ces trois dernières considérations élémentaires, les mathématiques, de manière cachée ou évidente, sont très profondément présentes dans l'art visuel, en sont constitutives, se situent à sa racine, qu'il s'agisse de peinture, de sculpture ou d'architecture.

L'ESMA ne possède pas bien sûr d'œuvre de Léonard De Vinci, mais un ensemble de 130 œuvres environ créées au cours de ces 20 dernières années. Toutes prêtées ou données par leur auteur, elles sont le fruit du travail d'une bonne trentaine de personnes, une quinzaine environ d'artistes proprement dit, une quinzaine environ de mathématiciens et d'informaticiens, de nationalité européenne y compris russe, ou américaine, du nord comme du sud. En allant sur le site de l'ESMA www.math-art.eu, vous pourrez consulter notamment le catalogue 2013 qui contient quelques



premiers éléments instructifs sur le contenu de ces œuvres.

Vous rendant sur la rubrique exhibitions du site, vous y trouverez la liste des expositions déjà faites à ce jour,

Exhibitions

LIST OF EXHIBITIONS

- Introduction : [L'ŒUVRE D'ART MATHÉMATIQUE. UN OUTIL PÉDAGOGIQUE EFFICACE](#)
- [Expositions et exposés: leurs raisons d'être](#)
- [Liste des expositions](#)
- Many other exhibitions, devoted mainly to algebraic surfaces, can be visited here: <http://www.imaginary-exhibition.com/gallery.php#3>

Catalogues	Photo Tours and Slide Shows
2016 EXHIBITION at the Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) Lausanne November 5-6 Under construction !  • Abridged Catalogue	2016 EXHIBITION at the Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) Lausanne November 5-6  • Photos of the Exhibition • Conference Lausanne (PDF) • Architectural animation of the Bicy Surface
2016 Conference at the INSTITUT FRANÇAIS Florence April 13-20   • PDF • PowerPoint presentation of the conference: NLWJ	2016 EXHIBITION at the Palazzo Medici Florence April 13-20  • Photos

et des photos: elles montrent d'abord des vues d'ensemble sur les salles d'exposition, puis des vues rapprochées sur de petits groupes d'œuvres, le texte de la conférence faite à l'occasion de chaque exposition. Ces conférences s'adressent plutôt à de larges publics. Leur divers contenu pourra compléter celui du présent exposé.

Le lien European Schools renvoie au contraire à des exposés faits dans quelques pays du sud de l'Europe et en France, auprès des élèves des écoles primaires et des collèges.

Examples

- [EUROPEAN SCHOOLS](#)

3) Newsletter: [March 2017](#)

[3\) Newsletter: March 2017](#)

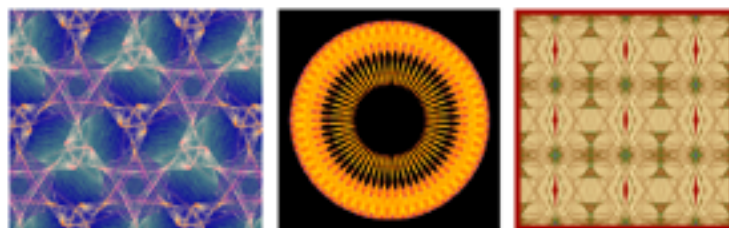
Pour ce qui est de la France, les contenus des exposés sont extraits de deux power-points assez conséquents: Bonne Année et Pâtisserie Mathématique. Comme le suggère leur titre, on ne devrait pas forcément s'ennuyer à leur lecture.

Que montrent les œuvres exposées ? Entre autres, des petites sculptures principalement inspirées par la théorie des polyèdres et par celle des nœuds, et imprimés sur papier, des pavages, des surfaces, des nœuds, des univers fractals.

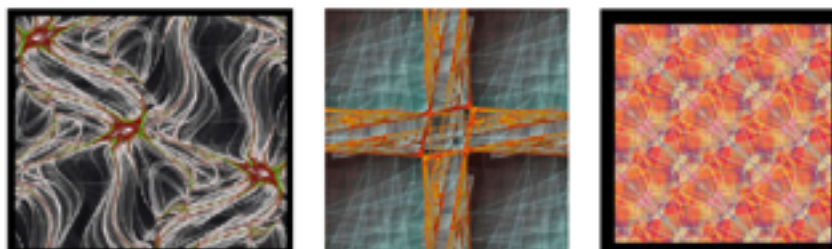
Les pavages présentés concernent principalement la dimension 2 dans les univers euclidien et hyperbolique.

En euclidien, les œuvres principales les plus originales tant sur les plans artistique que mathématique, sont celles de Mike Field. Son travail remarquable, de mathématique et de programmation, est en partie décrit dans le magnifique ouvrage *Symmetry in Chaos* [2], rédigé avec Golubitsky. Exercice: lire les programmes d'obtention des images, et rétablit les énoncés et démonstrations que recèlent ces programmes !

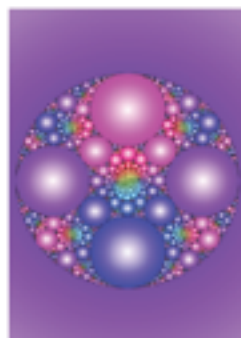
PAVAGES DU PLAN EUCLIDIEN



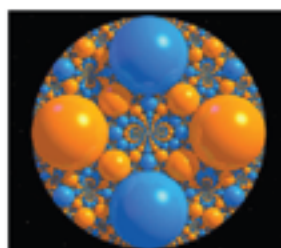
Facettes de Mike Field



Pavages de Mike Field



Virgile

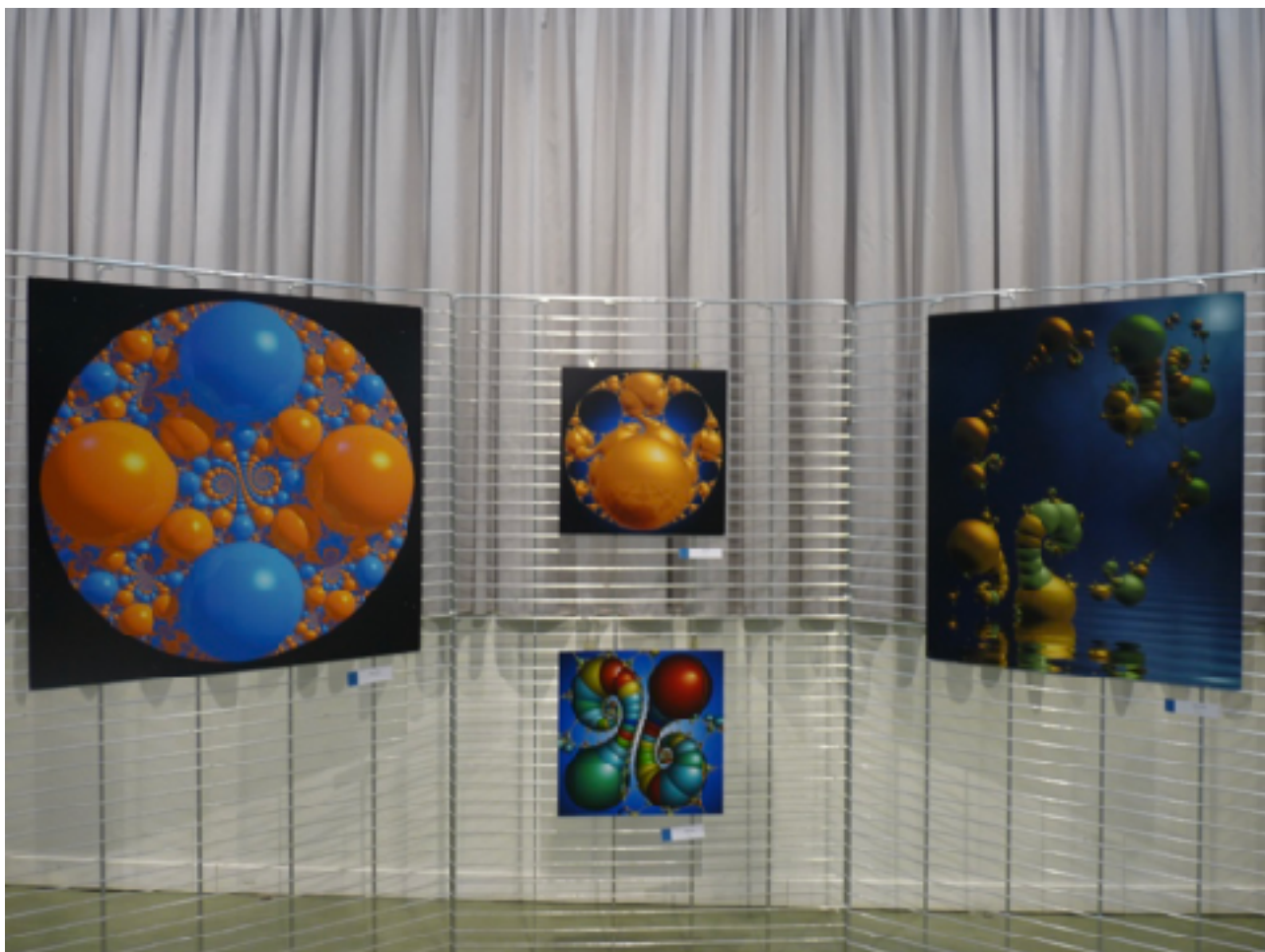


Leys



Austin-Casselmann-Wright

Le problème posé par Félix Klein du remplissage total d'un disque par d'autres disques a été résolu, au début des années 2000, par le trio Munford-Series-Wright - David Munford est une médaille Fields pour ses travaux en géométrie algébrique. La façon de construire ce pavage est décrit dans leur très bel ouvrage, très pédagogique, Indra's Pearls [3]. Jos Leys en a tiré les très belles images que l'on voit sur cette photo.



Œuvres de Jos Leys

L'outil principal utilisé pour résoudre le problème de Klein est la transformation homographique introduite par Euler pour décrire la projection stéréographique de la sphère sur le plan.

$$z' = (a z + b) / (c z + d)$$

Homographie ou transformation d'Euler (et non point de Möbius)

C'est une merveilleuse formule qui résume, concentre toutes les transformations habituelles du plan euclidien, translation ($z + b$), rotation, similitude ($a z$), inversion

($1/z$). Hélas, l'inversion qui m'a causé tant de plaisirs dans le secondaire, n'est apparemment plus enseignée aujourd'hui². Elle permet de ramener à l'intérieur d'un disque, tout l'espace qui l'entoure. C'est cette opération qui permet de résoudre le problème de Klein, jointe à celle du remplissage optimal mais partiel d'un disque par quatre disques plus petits ayant au plus un point commun, et dont les centres sont les sommets d'un carré - apparaît donc ici le groupe cyclique permettant de passer d'un

Groupe modulaire

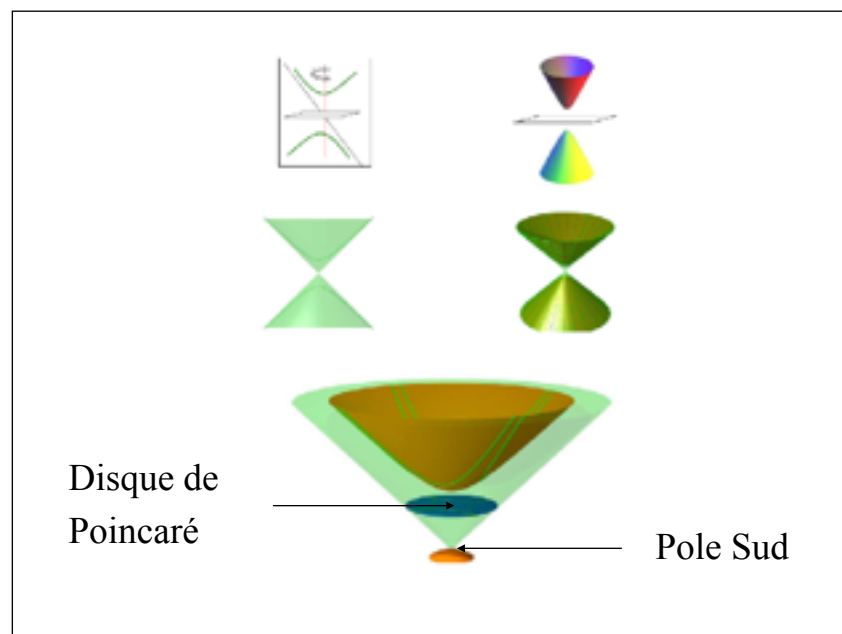
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\det M = 1$

petit disque à un autre.

Le groupe de ces transformations d'Euler, en particulier celui associé aux matrices de déterminant 1 et dit modulaire parce qu'il respecte le module d'une forme quadratique, joue depuis Gauss un rôle majeur également dans la théorie géométrico-algébrique des nombres.

Vous connaissez la projection stéréographique de la sphère, on peut faire celle de n'importe quelle quadrique, en particulier celle de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes. La projection stéréographique sur le plan horizontal de symétrie de



² Ecouter à ce propos la réaction du public ! Apparemment personne n'avait entendu parler du mot même d'inversion !

l'hyperboloïde, faite à partir du pôle sud, est le disque de Poincaré, la métrique euclidienne sur l'hyperboloïde, ramenée sur le disque, devient hyperbolique.

Si l'on fait un pavage de l'hyperboloïde, l'image sur le disque d'un pavé sur l'hyperboloïde sera d'autant plus petite que le pavé sera plus distant du pôle nord. D'où ces tableaux:



De gauche droite, œuvres de J. Leys, L. Sazdanovic, J. Constant, I. Rousseau

Un autre thème bien représenté dans les expositions est celui des surfaces géométrique. Une petit morceau de surface est assimilable à une portion de plan, vous avez l'impression que la terre est plate, cet élément de surface est donc de dimension topologique 2. Ce qui le caractérise est sa courbure. Pour caractériser cette courbure, on regarde les courbes tracées sur cet élément de surface et passant par un point déterminé. Chaque courbe possède une courbure qui est l'évaluation de la vitesse avec laquelle varie l'angle de la tangente à la courbe. Gauss a montré cette propriété surprenante, remarquable, « egregiae »: en chaque point de la surface passent deux courbes orthogonales l'une à l'autre qui ont cette propriété: l'une d'elles est celle qui possède la courbure maximale parmi toutes les autres courbes, l'autre est celle qui a la courbure minimale parmi toutes autres courbes. Le produit de ces deux courbures,

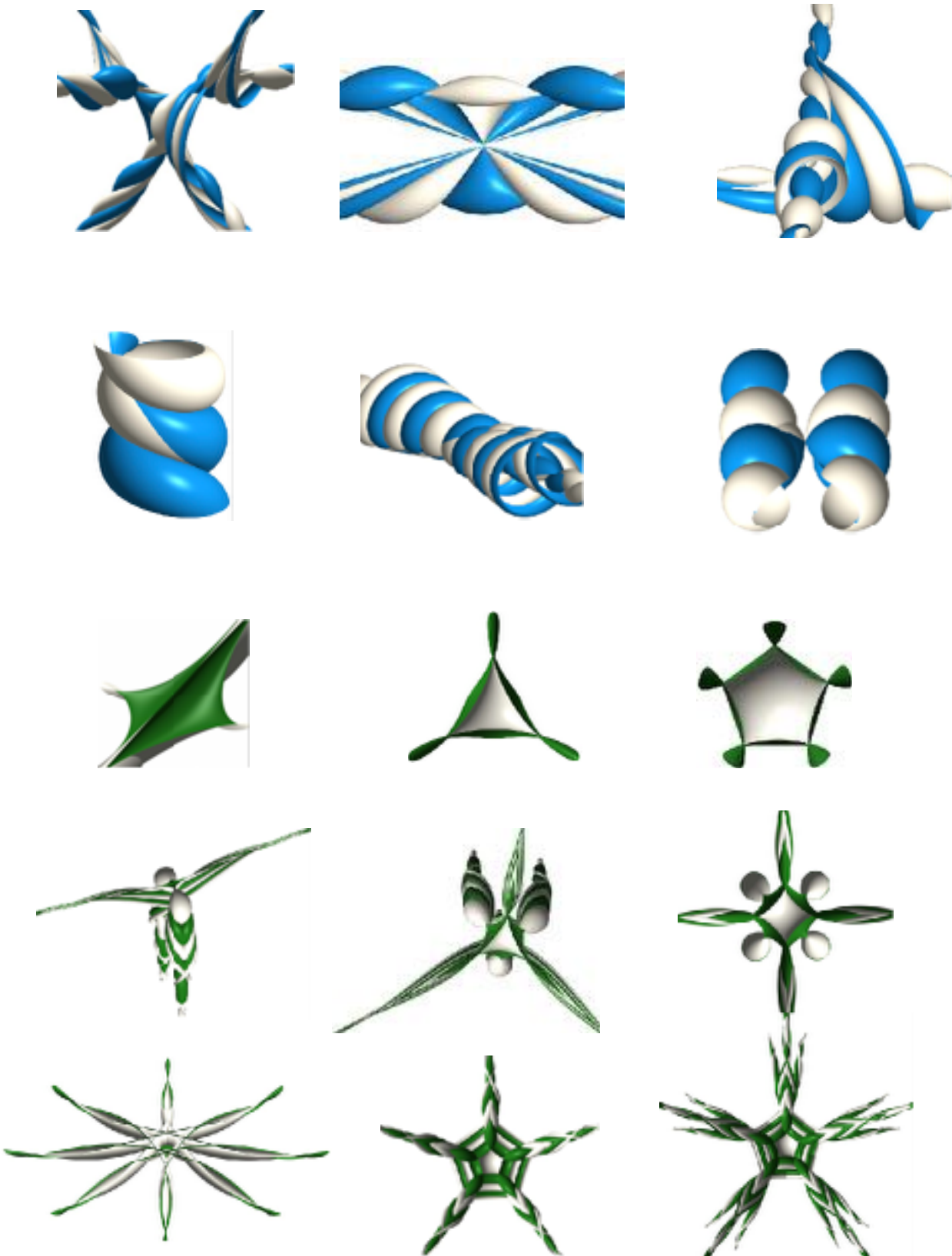
mesure de l'aire d'un élément de plan tangent à la surface, est la courbure locale de Gauss appelée encore courbure totale au point de rencontre des deux courbes. La demi-somme de ces deux courbures est la courbure moyenne locale. Une surface est dite minimale lorsque cette courbure moyenne est partout nulle.

Un tableau célèbre, primé par la National Science Foundation, est celui de Luc Bénard, intitulé un mathématicien à Murano, réalisé avec les logiciels du grand mathématicien Richard Palais.



Luc Bénard. Un mathématicien à Murano

Sont représentées 5 surfaces: de gauche à droite, en partant du bas, une représentation la bouteille Klein, une surface non orientable, ici construite à l'aide de deux rubans de Möbius dont on a identifié les bords, puis une surface minimale, le breather qui provient de l'étude des solitons, de courbure totale négative, la surface de Boy qui est une représentation dans l'espace usuel de l'espace projectif euclidien de dimension 2, donc surface à nouveau non orientable, et pour terminer la surface d'Enneper-Sievert, une surface de courbure constante positive, comme la sphère, et qu'on appelle une surface sphérique. Voici quelques exemples récents de surfaces sphériques.



David Brander. Exemples de surfaces sphériques (courbure totale positive constante)

Les surfaces algébriques, auxquelles se consacrent certains de nos voisins allemands avec leur logiciel de démonstration « surfer », sont définies par des équations polynomiales, et comme il y a autant d'exposants entiers possibles de que nombres entier existants, comme il y a autant de coefficients de ces polynômes que de nombres réels, on comprend aussitôt que soit justifiée cette affirmation de Hamlet, version française:

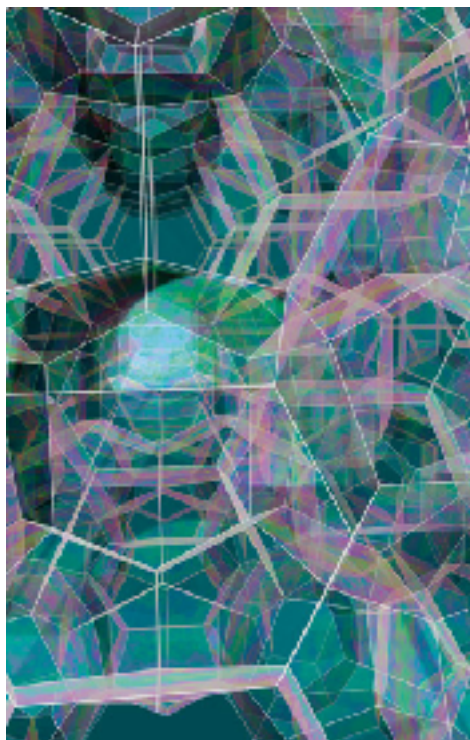
*« Il y a plus de choses sur la terre et dans les mathématiques, Horatio,
qu'il n'en est rêvé dans votre philosophie ».*

Cette vision de l'infini a sans doute contribué à détourner Pascal des mathématiques.

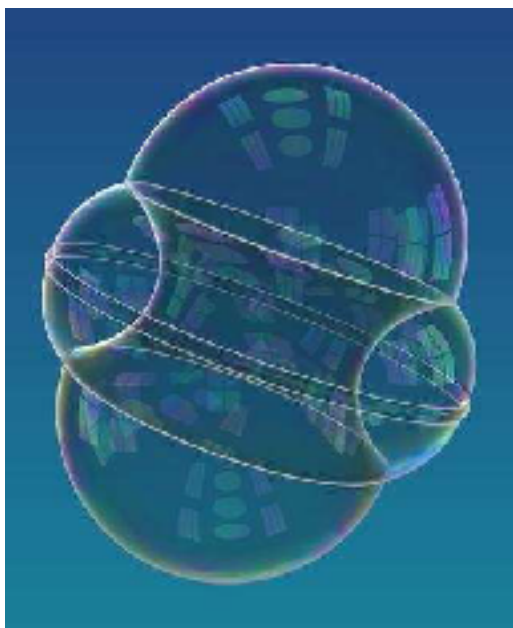
Toutes les surfaces obtenues par les mathématiciens sont-elles pertinentes, sont-elles associées à des phénomènes physiques comme par exemple les très belles surfaces obtenues par John Sullivan, faisant appel à des procédures d'optimisation ?



119 Bubbles, Digital print, 20" x 20"
John SULLIVAN, 1990



Foamy Partition : Weaire-Phelan
John SULLIVAN



**Double Bubble Trouble, Digital print
18"x22" John SULLIVAN, 1999**



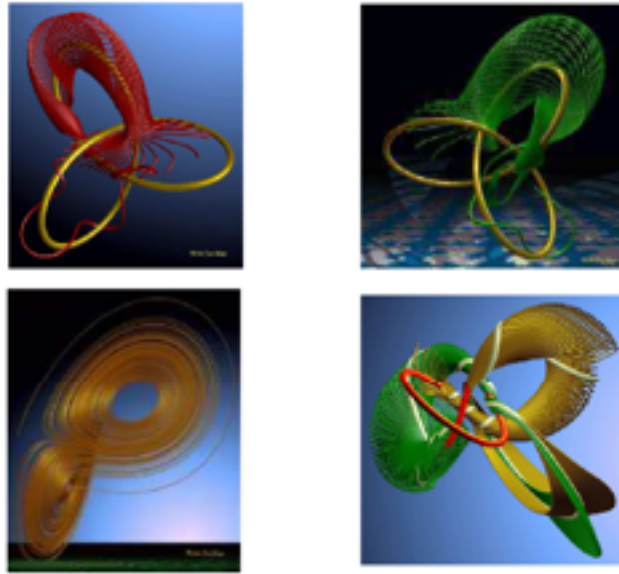
**Willmore Duel, Digital print, 20" x20"
John SULLIVAN, 2004**

L'heure passant, j'aborderai un troisième thème, celui des nœuds, encore appelés des lacets.

Ce sont des objets relevant de la topologie, déformables à souhait. La différence entre géométrie et topologie vient de ce que cette dernière ignore la prise en considération des données métriques, au contraire de la géométrie. Importe principalement en topologie les propriétés de connexité. Des notations adaptées permettent de reconnaître immédiatement si l'on a affaire à un objet vu sous l'angle topologique ou géométrique. Par exemple, une sphère topologique de dimension n sera notée S^n , alors que la sphère géométrique de même dimension sera notée C^n ; un tore topologique de dimension n sera noté $\mathcal{T}^n$, alors qu'un tore géométrique de même dimension sera noté T^n .

Une portion de courbe dont on soude, identifie les extrémités est un nœud, plus précisément un 1-nœud $\mathcal{N}$. Le cercle C^1 , et toute déformation S^1 du cercle comme l'ellipse ou le bord d'une face d'un polyèdre, est un nœud $\mathcal{N}$ dit trivial. Le premier nœud véritablement intéressant est le nœud de trèfle, un nœud dit torique car il s'enroule parfaitement autour du tore standard. Un nœud de trèfle est aussi le bord d'un ruban de Möbius vrillé trois fois.

Voici des petits tableaux, réalisés par Jos Leys, montrant des nœuds de trèfle qui apparaissent comme trajectoires - penser toute courbe comme une trajectoire !!!



- également comme attracteurs de systèmes dynamiques (lieux vers lesquels convergent au sens mathématique des trajectoires).



L'animation suivante qu'a bien voulu préparer Jos Leys est assez riche d'enseignement. On y voit d'abord un point, un cercle de rayon nul, un cube ou un tore de dimension nulle, qui bifurque, éclate en un cercle topologique, c'est aussi un tore, de dimension 1.

On le fait tourner autour de l'un de ses diamètres, et on observe sa projection sur le plan horizontal, lorsque le centre de projection est un soleil situé à l'infini dans

la direction perpendiculaire au plan horizontal, illuminant l'espace de rayons dorés tous parallèles. Cette projection du cercle est un segment quand ce tore, ce cercle, est dans un plan vertical. La seule vue de ce segment ne permet en aucune façon de reconstituer l'objet réel qui lui a donné naissance. Il y a mille façons de relever ce segment dans l'espace, ce peut être par exemple un simple triangle, lequel est topologiquement un cercle, ou toute courbe située dans le domaine du plan vertical défini par la réunion des verticales en chaque point du segment ombre. Le personnage qui abrite le pays plat d'Edwin Abbott, Flatland, le plan, ne se rend pas compte qu'il ne voit que des ombres. On retrouve ici une belle illustration par la mathématique du mythe platonicien de la caverne, l'homme, l'être vivant, ne voient sur des écrans, les murs des cavernes, que des ombres de la réalité.

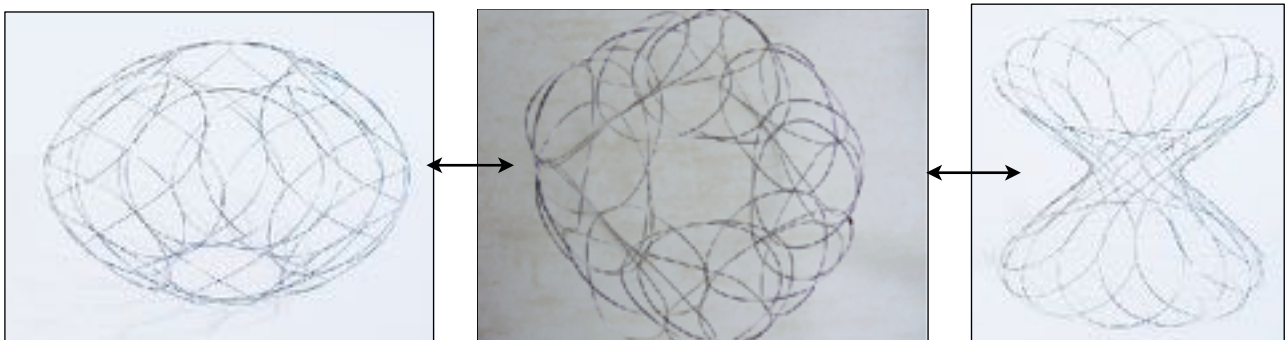
L'animation montre également l'apparition d'un second point, symétrique du premier par rapport à un plan perpendiculaire au plan horizontal, jouant un rôle analogue à celui d'un miroir. Ce point bifurquera, éclatera en un cercle symétrique du précédent que l'on fait apparaître. On coupe les deux cercles et on les déforme jusqu'à faire apparaître deux nœuds de trèfle symétriques, l'un lévogyre, l'autre dextrogyre.

Entre en scène un couple de danseurs: la trajectoire de leurs mouvements est justement pour chacun l'un des nœuds de trèfle. Le thème de la singularité resurgit avec le contact instantané des danseurs avec le sol, et les points les plus élevés de leur saut, caractéristiques ici de la géométrie et de la symétrie de ces nœuds plongés dans notre espace habituel.

D'autres nœuds, ici réalisés par l'architecte mathématicien russe Dmitri Kozlov et matérialisés par des fils métalliques et déformables, représentent simplement des surfaces classiques comme ici la sphère,



ou même, comme celui-ci, par sa capacité à se transformer,



représente partiellement l'une des trois surfaces classiques, de gauche à droite: la sphère géométrique C^2 (courbure totale positive, proportionnelle au rayon), le tore géométrique T^2 (courbure totale nulle, une moitié du tore est de courbure positive, l'autre moitié a la même courbure mais négative) et l'hyperboloïde de révolution géométrique à une nappe $H^{2,1}$ (courbure totale négative).

On remarquera que les nœuds ici présents sont auto-transverses. De manière générale, toute surface peut être représentée totalement ou partiellement par un tel nœud (cf [1]).

On peut s'interroger sur la présence des nœuds et sur l'intérêt de leur prise en compte dans l'étude des propriétés des objets topologiques et géométriques, à commencer par les plus familiers d'entre eux, les polyèdres et les polytopes. On a vu que les faces des polyèdres ont pour bord des nœuds triviaux. On peut en faire des assemblages, plus ou moins singuliers. Il peut arriver par exemple que trois triangles aient en commun un seul point commun: ils forment, tous les trois réunis, un nœud de trèfle singulier. Par déploiement du point singulier, on retrouve un nœud de trèfle standard.

Ces premiers nœuds triviaux sont construits à partir des arêtes habituelles des polyèdres, nous les appellerons des arêtes extérieures. Mais on peut concevoir la notion d'arête intérieure: toute portion de courbe joignant deux sommets d'un polyèdre et située à l'intérieur du polyèdre plein. On peut alors concevoir des nœuds fabriqués à partir d'arêtes aussi bien extérieures qu'intérieures. D'où alors la question problème: un polyèdre, un polytope étant donné, quels types de nœuds, en quelle quantité, peut-il renfermer ? Le problème général est ouvert.

Considérons à titre d'exemple le cuboctaèdre:

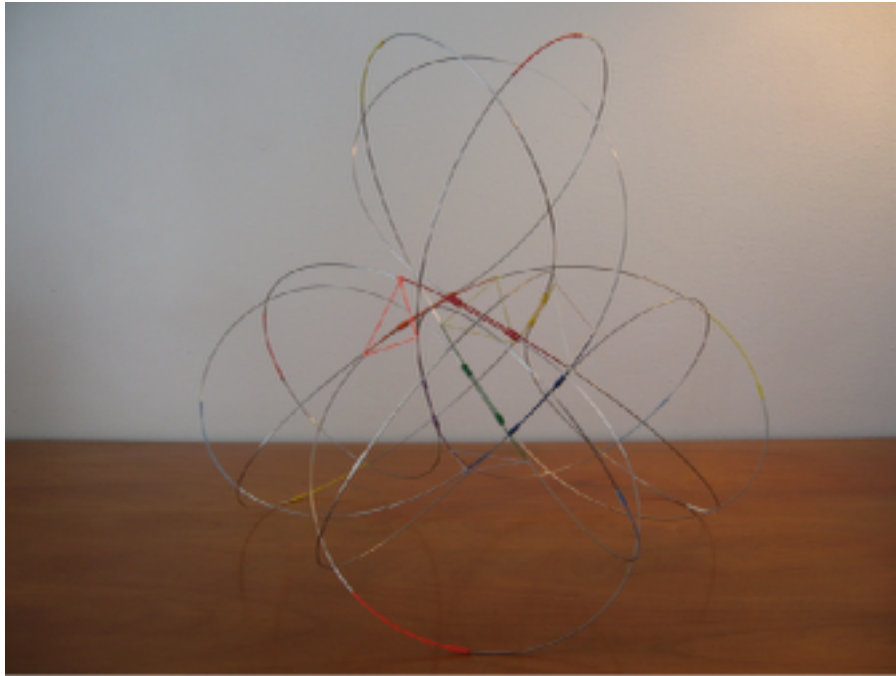


Da Vinci. Cuboctaèdre



Un des poids utilisé par les Vikings pour peser l'argent en Angleterre (Jane Kershaw)

Il contient quatre nœuds de trèfle, disposés à la manière de quatre oranges harmonieusement empilées. Non sans difficulté, Philippe Rips qui œuvre dans le domaine artistique de la tensegrité, en a réalisé l'assemblage esthétique que voici:



Bruter-Rips. Représentation symbolique la surface Boy

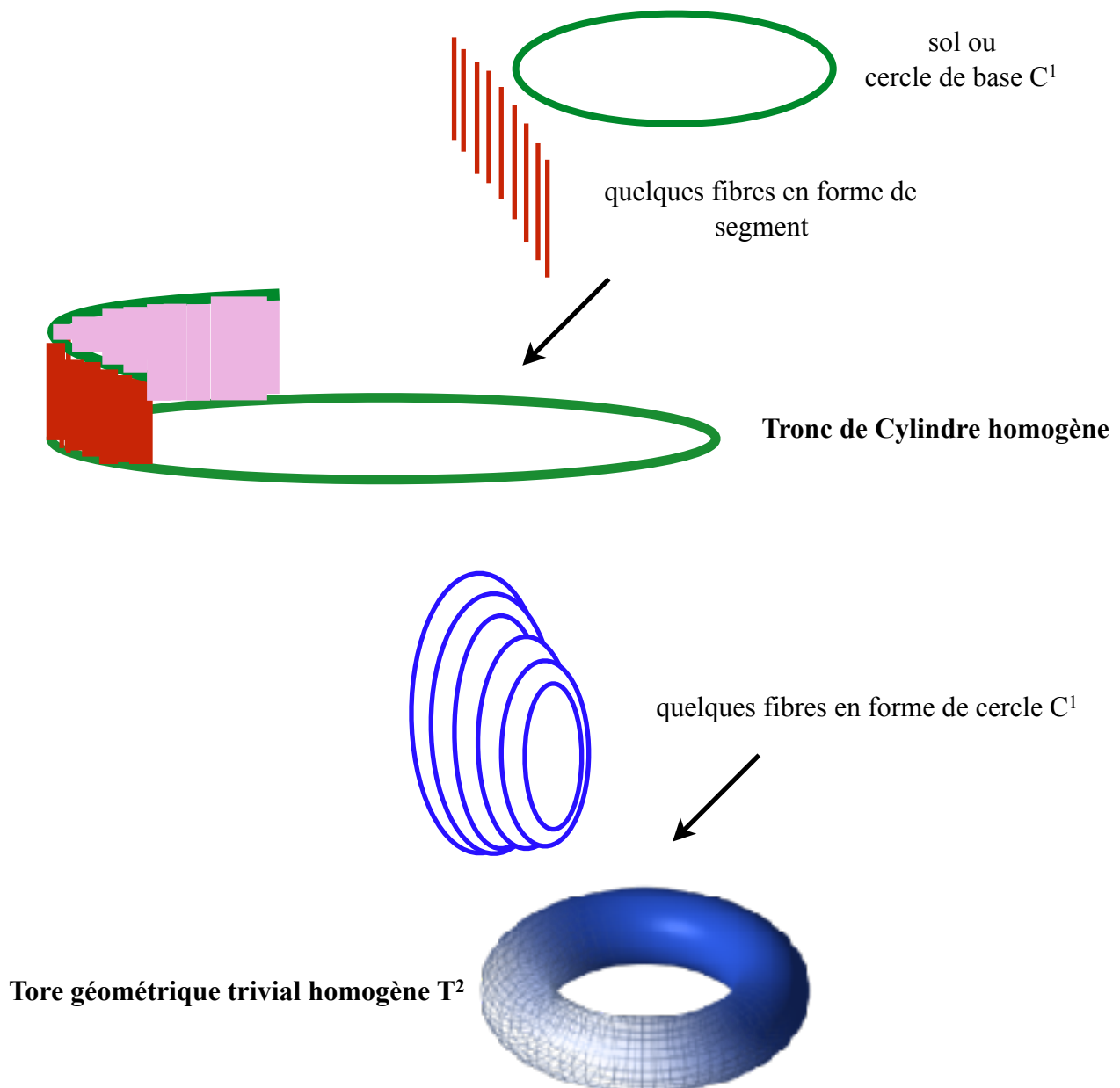
Comme nombre d'œuvres réalisées à l'aide de fils métalliques, cet assemblage reste structurellement invariant par déformation, il résiste à tout tremblement de terre, et même, complètement aplati, revient spontanément à sa position et à sa forme initiales.



Le repos de Boy

Après les trajectoires ou courbes, les nœuds ou lacets en sont une famille particulièrement significative, viennent les importants espaces fibrés (le terme fibre, « Fraser » en allemand, a été introduite par H. Seifert en 1932). La notion d'espace fibré est extrêmement générale.

Fondamentalement, un espace fibré, semblable à un tronc d'arbre composé d'une base B au dessus de laquelle poussent en hauteur les fibres F , est un produit cartésien $B \times F$.



Cette notation n'est pas anodine: le fait que B occupe la première place, traduit le fait sémantique de l'importance première de B . La base détermine la nature de

fibre possible. Cette notation signifie aussi qu'au dessus de chaque point de la base, et quel que soit le point choisi, la fibre est la même. Sans doute faudra-t-il un jour s'affranchir de cette dernière condition.

Cette notation traduit aussi le fait que B et F n'ont pas a priori les mêmes propriétés: ce produit cartésien n'est pas en général commutatif. F peut bien sûr être lui-même un produit cartésien. Une catégorie mathématique peut être comprise comme un espace fibré: la base B est constituée des objets de la catégorie, par exemple une famille de groupe bien spécifiés, la fibre au dessus de chaque « point » de la base (un groupe de cette famille) est une autre famille bien constituée d'applications (morphisms) entre ce point et d'autres points de la base. On peut même envisager une notion de sur-catégorie, les objets de la base étant des catégories, la fibre des foncteurs.

Mais soyons plus simple et regardons un des objets noté B et figurant dans le tableau de Luc Bénard: on peut considérer cet objet B comme la base d'un espace fibré, la fibre F en chaque point P de l'objet est l'espace $F = \mathbf{R}$ de taille infinie de l'ensemble des couleurs possibles, chacune étant représentée par une fréquence, un nombre. La couleur $c_B(P)$ du point P choisie par Luc est donc la valeur en P d'une application $c_B: B \longrightarrow F$. Naturellement le choix de la valeur de l'application dépend de l'artiste.

Il peut arriver que $B \times F = F \times B$, ce qui implique que l'on considère B et F structurés de la même manière et qu'on se place uniquement du point de vue de cette structure commune.

C'est dans ce cadre que nous allons nous maintenir, prenant en considération :

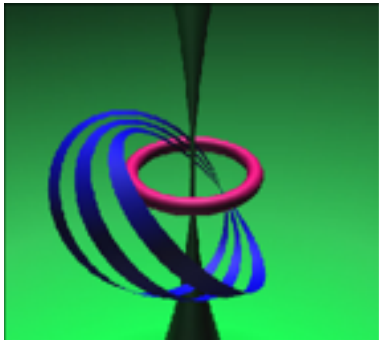
- des tores topologiques creux $\mathcal{T}^{1+1}$ en tant qu'espaces fibrés $E = B \times F$ de base B un nœud $\mathcal{N}$, de fibre F le nœud trivial qui est la sphère topologique S^1 . Par exemple celui-ci, la base est un nœud de trèfle:



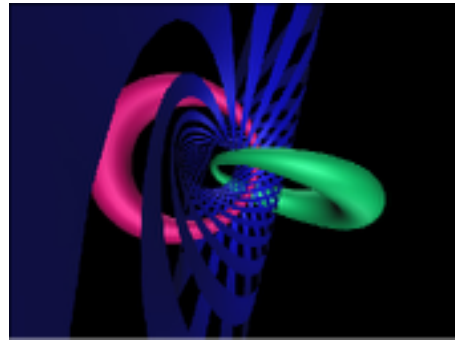
Dominique Ribault

- des tores topologiques pleins $\mathcal{T}^{1+2} = S^1 \times \mathcal{D}^2$
- des tores topologiques pleins $\mathcal{T}^{2+1} = \mathcal{D}^2 \times S^1$

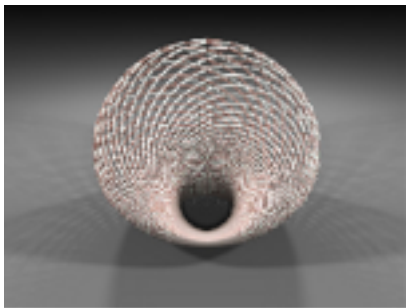
Ces deux dernières formulations conduisent au même résultat. La seconde a été développée par Herbert Seifert (fibration de Seifert: fibré dont la base est un objet de dimension 2, la fibre un cercle). Voici des exemples de tels tores topologiques, les plus appétissants en dernier:



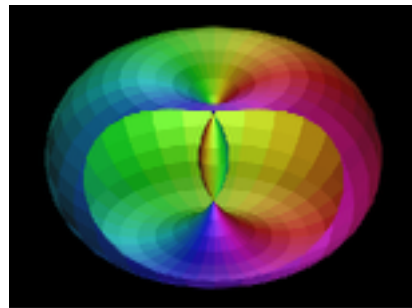
Thomas Banchoff. Hopf links



Thomas Banchoff. Pendulum tori



De Comite. Cyclide de Dupin



Thomas Banchoff. Spindle torus



Franc Savnik. Evasiveness (120 equilateral triangles, polished bronze)



Philippe Charbonneau. Trois tores en réflexion, 2016



Extraits de Pâtisserie Mathématique.

L'animation suivante nous montre un disque plat que l'on fait tourner, sa trajectoire étant un cercle: on commence par montrer ainsi une fibration de Seifert du tore géométrique standard, en chaque point du disque apparaît un cercle.

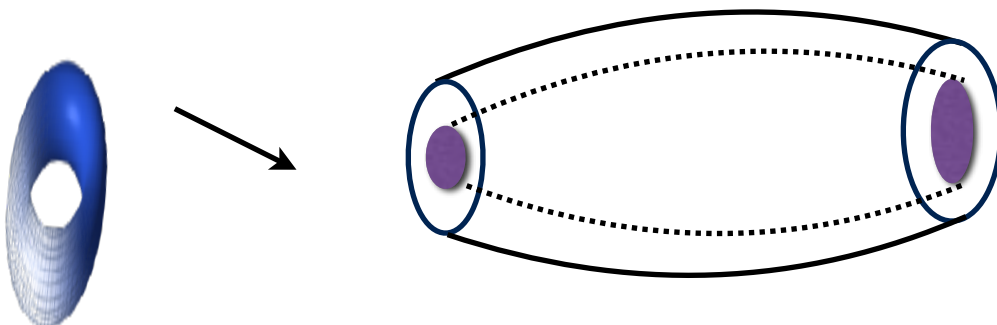


Considérant ensuite ce tore géométrique comme un tore topologique, on le déforme pour obtenir finalement un cirque romain, comme celui de Vérone ou comme celui de Nîmes:

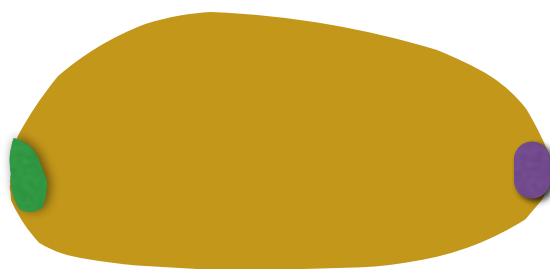


Qu'y a-t-il dans ces cirques romains, dans celui de Nîmes par exemple ?

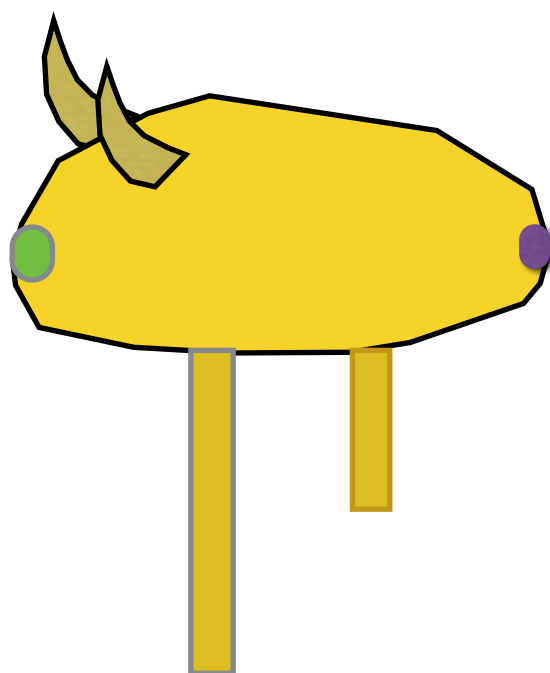
La réponse va tenir dans ces dessins. D'abord dans celui de ces premières déformations du tore:



dont on peint la masse en jaune:



et que l'on déforme encore: en étirant vers le bas, apparaissent alors des pattes rectangulaires, et en étirant vers le haut, surgissent des cornes harmonieusement spiralantes, analogues à celles de l'inénarrable rhinocéros de Dali³.

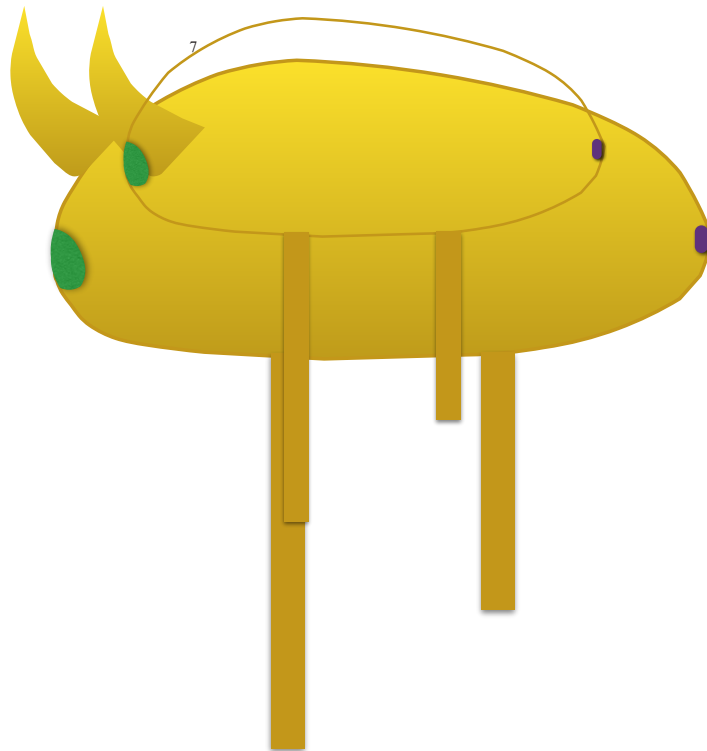


³ « Mais soudainement je découvris que, dans les entrecroisements des spirales qui forment le tournesol, il y a évidemment le galbe parfait des cornes de rhinocéros.

Maintenant les morphologues ne sont pas du tout sûrs que les spirales du tournesol soient de vraies spirales logarithmiques ; ce sont des spirales qui approchent beaucoup, mais il y a des phénomènes de croissance qui font qu'on n'a jamais pu les mesurer avec une exactitude rigoureusement scientifique ; et les morphologues ne sont absolument pas d'accord si ce sont des spirales logarithmiques ou non. Mais, maintenant, je me suis renseigné à propos de la corne du rhinocéros elle-même : alors là, il n'y a aucun doute, il n'y a jamais eu dans la nature un exemple plus parfait de spirale logarithmique que dans le galbe de corne de rhinocéros. » Salvador DALI : Oui, Méthode paranoïaque-critique et autres textes, Denoël/Gonthier, Paris, 1971



Epoque d'Alexandre, vers - 320



Hommage à Dalí: Tore Haut

Cet admirable portrait, biscornu et méritant, reçoit alors l'hommage du public, coiffant l'œuvre avec solennité de la

Couronne d'Alexandre,
t'or à nouveau fibré en spirales ordaliennes.

Tout animal familier, tout homme, tout mammifère, et bien d'autres animaux seraient essentiellement et topologiquement des tores, telle est la « leçon philosophique » de cette illustration d'une notion mathématique simple.

Références

- [1] C.P. BRUTER Des Mathématiques et des Arts, Conférence Suresnes, http://www.math-art.eu/Exhibitions/Suresnes2017/Conference_Suresnes.pdf
- [2] M. FIELD, M. GOLUBITSKY Symmetry in Chaos, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [3] D. MUMFORD, C. SERIES, D. WRIGHT Indra's Pearls, The Vision of Felix Klein, Cambridge University press, Cambridge, 2002.
- [4] T. TODOROV Le Triomphe de l'Artiste, Flammarion, Paris, 2017.
- [5] L. DE VINCI Le Traité de la Peinture de Léonard de Vinci, Jean de Bonnot, Paris, 1977.