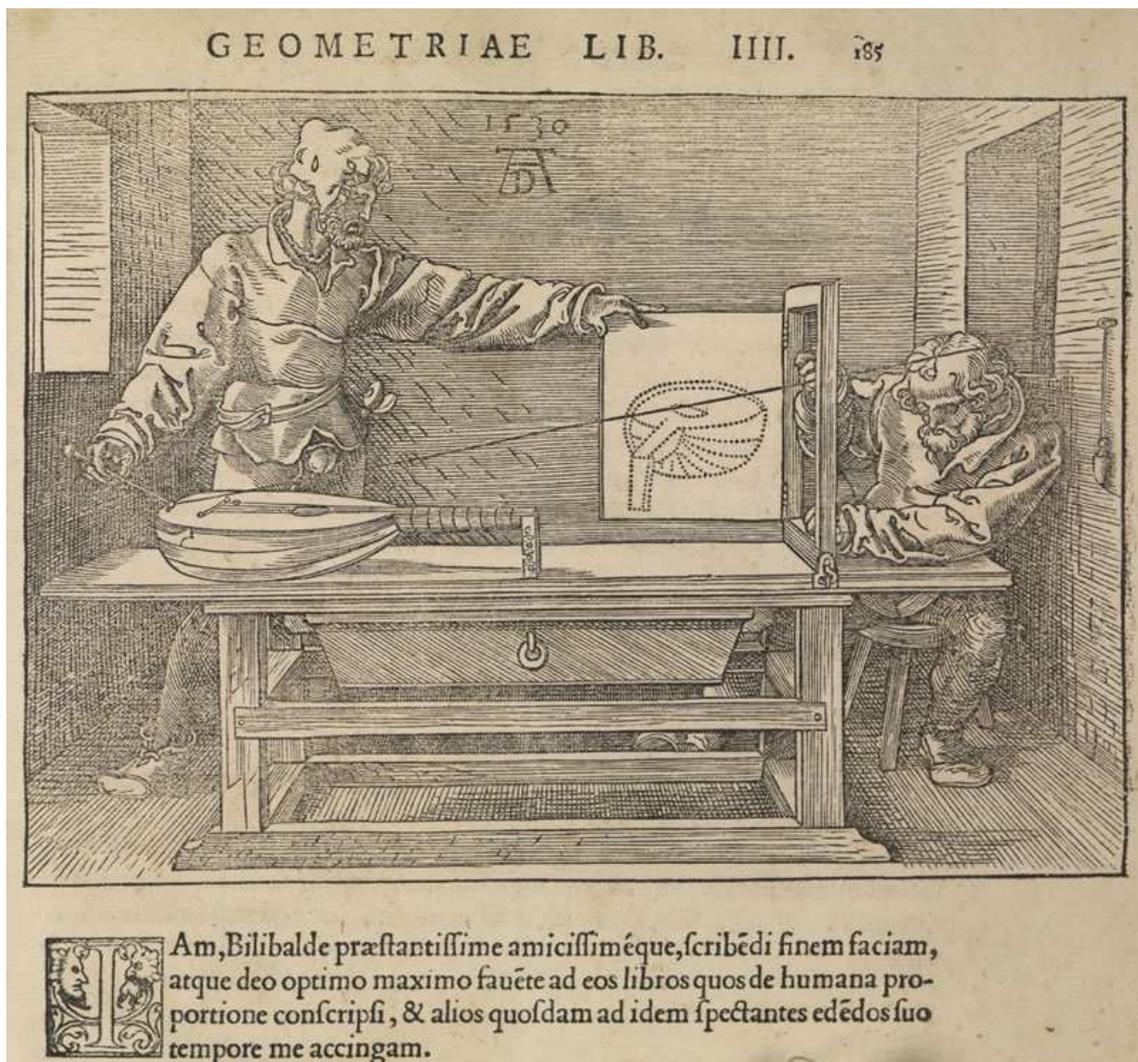


INITIATION À LA PERSPECTIVE LINÉAIRE

C.P.BRUTER



Albrecht Dürer

Extrait de ses *Instructions pour la mesure à la règle et au compas* (1538, [De Symmetria... and Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit](#)), page 177

Image 1

INTRODUCTION

Nous allons traiter, dans cet exposé, principalement de géométrie, d'art assez peu. A moins qu'on ne considère les mathématiques et donc la géométrie comme un art, ce qui n'est point faux.

On parvient à établir cette géométrie en se plaçant de deux points de vue, l'un proprement physique, l'autre essentiellement humain.

Du point de vue physique, le phénomène fondamental qui nous intéresse ici est le phénomène lumineux, la source de lumière qui éclaire, envoie des rayons, en première approximation supposés rectilignes¹, disposés en faisceaux cylindriques ou coniques, et, s'arrêtant sur les objets, les fait voir.

Du point de vue humain, et dans un premier temps correspondant à l'approche des anciens² et de la majorité des peintres de la Renaissance et au-delà, le correspondant de la source de lumière est l'œil de l'observateur, lumineux, pétillant, source de regards supposés également rectilignes et encore disposés quelquefois en cylindres, plus généralement en cônes et qui, s'arrêtant sur les objets, les fait voir.

En somme l'observateur est considéré comme une source de lumière, entre autre intellectuelle, cela va sans dire. Comme, du point de vue historique, ce sont les observations du monde physique qui sont à l'origine de la géométrie, c'est par l'approche physique que nous allons faire quelques premiers pas dans l'univers idéal de la géométrie.

Cela dit, il arrivera que soit employé le terme *perspective* au lieu du terme *géométrie*. En voici la raison : par *théorie de la perspective*, on entend une théorie de la représentation d'un domaine du champ visuel sur une surface, qui peut être plane (toile, mur droit), ou non, et qui donne l'illusion d'être en présence du contenu véridique de ce domaine. A priori, dans cette théorie, on s'attache à représenter non seulement la forme mais aussi les jeux de teintes et de couleurs. La partie primaire de cette théorie se limite à la représentation des formes. Il se trouve que cette représentation est également l'objet de la

¹ La question de la courbure des rayons lumineux ne sera pas traitée ici. Rappelons simplement qu'une masse très importante a un effet sur cette courbure. En l'occurrence, la masse de la terre n'a pas d'influence sensible. Par contre, l'intégration d'effets de réfraction infinitésimaux peut être assimilée à un effet de courbure.

² Citons ici le *Timée* de Platon, premier exemple que nous possédons, dans son intégralité, d'une description du monde s'appuyant sur une théorie mathématique, elle aurait été rédigée entre – 370 et – 348 : « Quand la lumière du jour entoure le flux issu des yeux, alors le feu intérieur qui s'échappe, le semblable allant vers le semblable, après s'être combiné avec la lumière du jour, se constitue en un seul corps ayant les mêmes propriétés tout le long de la droite issue des yeux, » « quel que soit l'endroit où le feu qui jaillit de l'intérieur entre en contact avec le feu qui provient des objets extérieurs. Il se forme ainsi un tout qui a des propriétés uniformes en raison de son homogénéité ; si ce tout vient à entrer en contact avec quoi que ce soit ou si quoi que ce soit d'autre entre en contact avec lui, il lui transmet les mouvements à travers tout le corps jusqu'à l'âme, et nous procure cette sensation grâce à laquelle précisément nous disons que « nous voyons » ». (45 c-d).

géométrie. La perspective au sens restreint du terme, et que l'on peut qualifier de *perspective géométrique*, ne se distingue donc pas de la géométrie.

Le phénomène physique essentiel, avons-nous dit, est celui de la lumière qui éclaire les objets, et dont on observe les ombres sur des écrans, des représentations donc de ces objets.

La géométrie est l'étude des propriétés de ces ombres.

Selon le degré d'abstraction dans lequel on se place, le moyen technique d'observation, l'ombre d'un objet ponctuel, d'un point sur un écran sera appelé effectivement son *ombre*, mais aussi sa *projection*, son *image*, son *homologue*, sa *représentation*.

Dans un premier chapitre, nous allons examiner principalement la théorie de la perspective classique et linéaire telle qu'elle a été introduite à la Renaissance. Dans cette version originelle, les rayons lumineux sont rectilignes, l'écran sur lequel on fait la représentation est plat. La théorie mathématique est alors élémentaire, ne faisant fondamentalement appel qu'au théorème de Thalès, et à ses subséquents comme l'algèbre linéaire.

Nous évoquerons ensuite des problématiques et des études parfois récentes qui se situent dans le prolongement de la théorie première : éléments caractéristiques des formes et des ombres sur des écrans plats en présence de rayons rectilignes, cas où l'écran n'est pas plat, cas où les rayons ne sont pas rectilignes.

Nous évoquerons dans un second chapitre quelques emplois pratiques de la perspective classique. Un troisième chapitre sera consacré à un très bref historique de la perspective.

CHAPITRE 1

PERSPECTIVE CLASSIQUE (LINEAIRE³) ET GEOMETRIE DE TYPE EUCLIDIEN

Selon la position de la source lumineuse, on distingue deux types de géométrie :

- Lorsque la source est à l'infini, elle engendre un premier type de perspective et de géométrie, dit de type *euclidien*.
- Lorsque la source est à distance finie de l'observateur, elle engendre un second type de perspective et de géométrie, dit de type *projectif*.

Nous allons, dans un premier temps, dégager les propriétés principales de chacun de ces types de géométrie ou de perspective, comme on voudra. On qualifiera ici cette perspective de *classique*, on verra plus loin pourquoi.

1. Les données expérimentales qui fondent la perspective cylindrique

Lorsque la source de lumière est à l'infini, comme l'est, par exemple et nous semble-t-il, le soleil, les rayons issus de la source paraissent parallèles : ils donnent, des objets, des ombres qu'on dit être obtenues par *projection parallèle* ou *cylindrique*.

Qu'observe-t-on ?

1. Les alignements sont conservés :

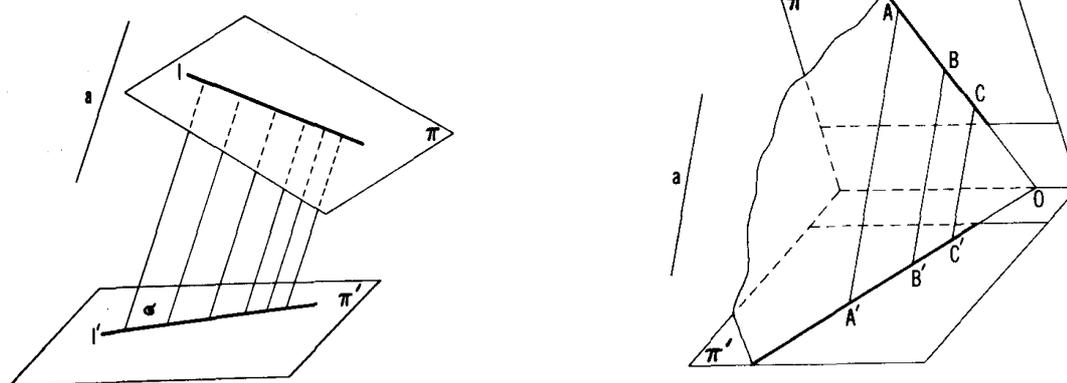


Figure 1
Empruntée à [28]

³ Dans cette perspective, on n'utilise que des lignes : c'est dans ce sens que Léonardo da Vinci, le premier semble-t-il, a employé l'expression de « perspective linéaire ». Elle été aussi qualifiée d' « artificielle », par opposition à la représentation de ce que tout le regard du peintre saisit, entre autres les jeux d'ombre et de lumière.

2. Les parallélismes sont conservés :

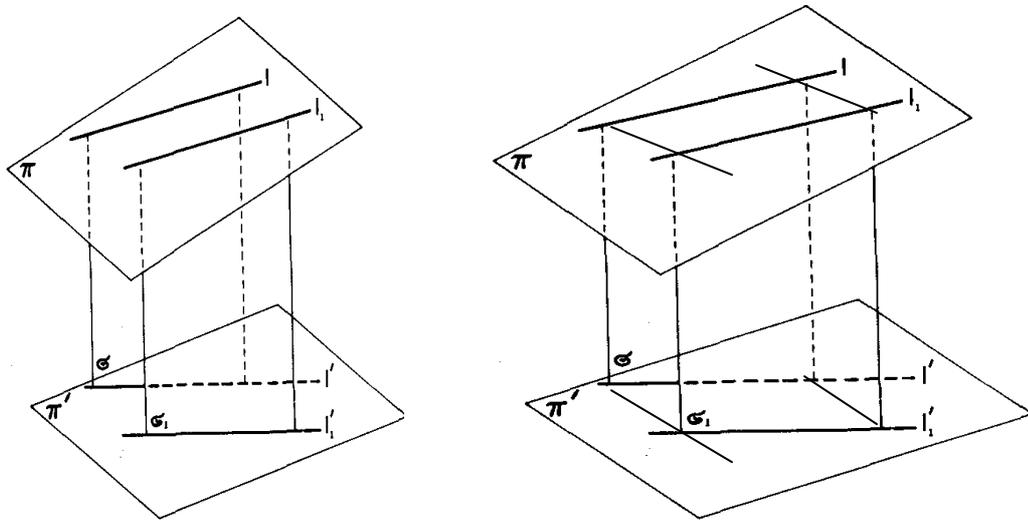


Figure 2
Empruntée à [28]

3. Les proportions sont conservées :

Comme le montre l'observation physique, codifiée sous le nom de :
théorème de Thalès, cette projection conserve les proportions des figures aux

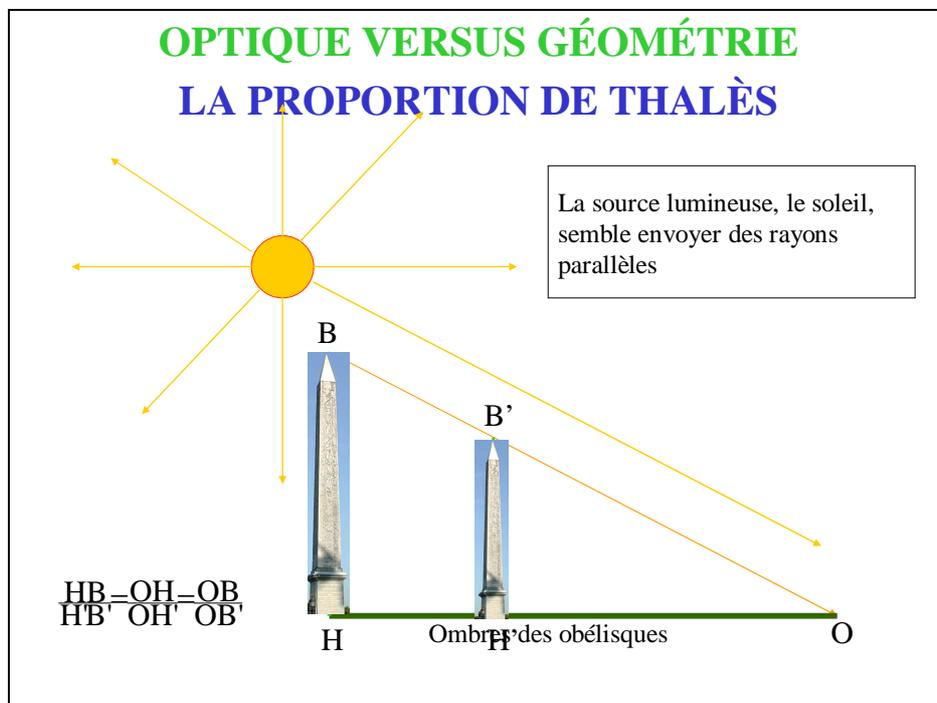


Figure 3

côtés parallèles, par exemple $HB / HO = H'B' / H'O$: les figures sont dites *semblables*.

Le fameux « théorème » de Thalès n'est qu'un fait de l'observation du monde physique. Il est l'énoncé fondamental de la géométrie de type euclidien, il affirme l'invariance des proportions d'une figure par projection parallèle.

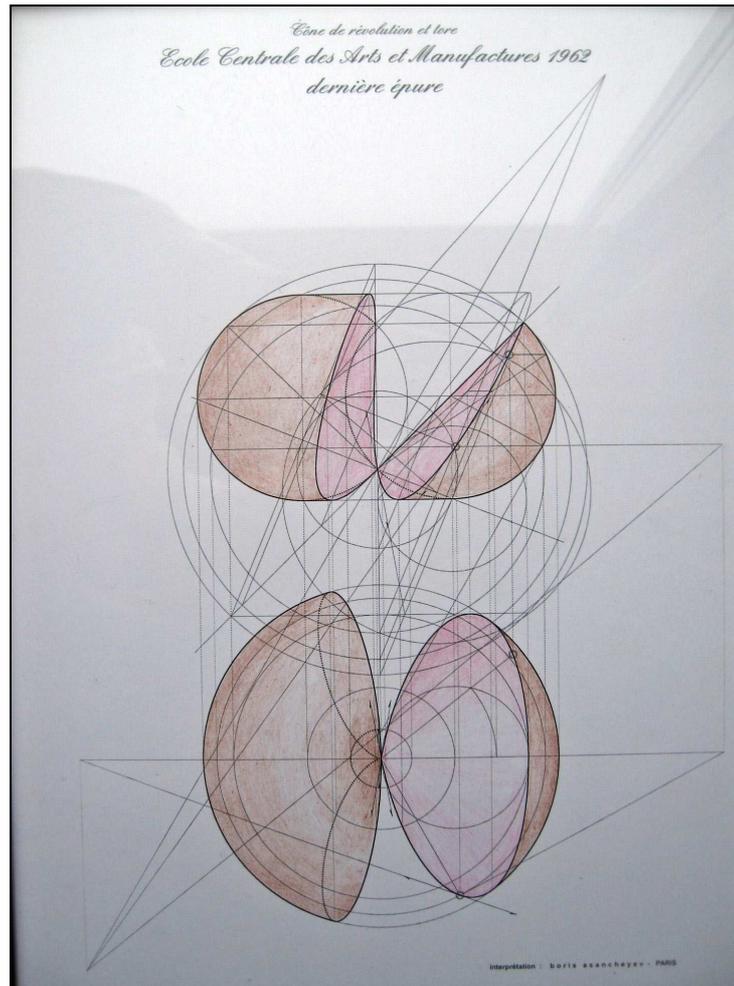


Image 2
Empruntée à [28]

La perspective correspondante est dite *cylindrique* ou *axonométrique*. Elle porte différents noms selon la direction des rayons parallèles :

- 1) on parle d'une *projection* ou d'une *perspective orthogonale* ou encore d'une perspective *axonométrique droite* quand les rayons frappent perpendiculairement l'écran.

La « géométrie descriptive », développée par Monge à la fin du 18^{ème} siècle bien après que Dürer au 16^{ème} siècle en ait proposé le principe, utilisait deux projections orthogonales du même objet sur deux écrans : celui *du sol* d'une part, appelé aussi parfois *plan de rabattement* ou encore *plan géométral*, et celui d'un plan perpendiculaire au sol, le *plan frontal* ou encore *le plan debout* ou encore le *plan du tableau*. Un problème posé aux concours des grandes écoles jusque vers la fin des années 50 était de dessiner dans ces deux plans les intersections de deux surfaces données dans notre espace usuel.



La dernière épure qui fut proposée au concours de l'École Centrale des Arts et Manufactures en 1962

(réalisée ici par Boris Assanchev)

Image 3

- 2) La perspective est *axonométrique oblique* lorsque les rayons parallèles ne sont pas perpendiculaires à l'écran. On l'emploie quelquefois sous le nom de *perspective cavalière* (elle fut notamment utilisée par les ingénieurs militaires).

Disons un mot sur la représentation numérique d'une projection parallèle d'un domaine de l'espace usuel sur un plan. Un point P de ce domaine a pour coordonnées x, y, z . Sa projection $f(P) = P'$ sur un plan, objet à deux dimensions, a pour coordonnées $x' = u$, et $y' = v$.

Plaçons-nous dans le cas simple où une droite de vecteur directeur W , passant par P , rencontre le plan de projection en un point O : de la sorte $f(O) = O' = O$. Le vecteur W est projeté en $f(W)$. Si $P = k W$, son image est le point $P' = f(k W) = g f(W)$. Le respect des proportions implique que $g = k$.

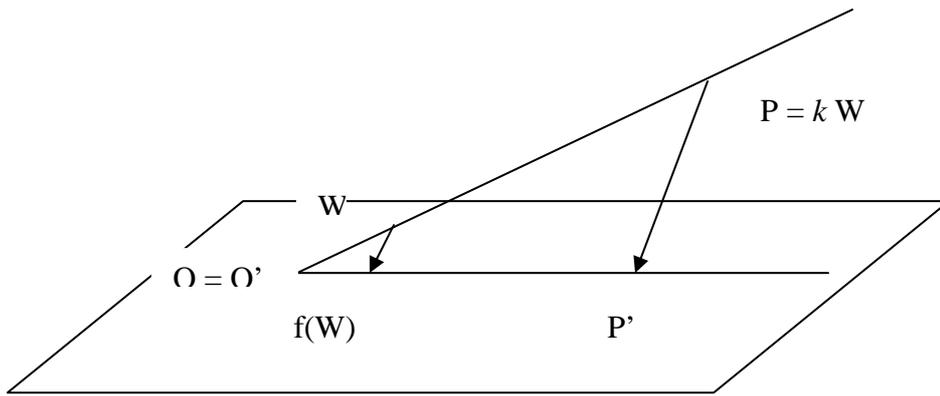


Figure 4

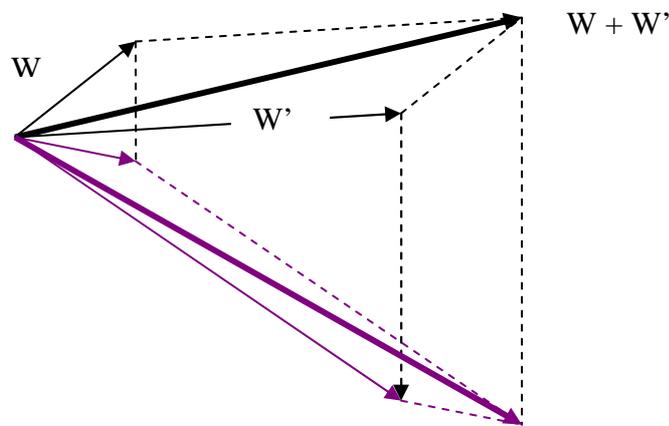


Figure 5

Par ailleurs si W et W' sont deux vecteurs, de projection respective $f(W)$ et $f(W')$, la construction géométrique de leur somme et des projections correspondantes montre, du fait de la conservation des parallélismes, que

$$f(W + W') = f(W) + f(W').$$

L'application f , qui obéit à ces deux règles, $f(k W) = k f(W)$, $f(W + W') = f(W) + f(W')$, est dite *linéaire*.

Pour se repérer dans l'espace usuel, trois vecteurs de directions indépendantes les unes des autres suffisent. On les appelle des *vecteurs générateurs* ou des *vecteurs de base*. Si on les note $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, tout vecteur W de l'espace usuel s'écrit sous la forme

$$W = x \epsilon_1 + y \epsilon_2 + z \epsilon_3,$$

Supposons qu'on projette tout cet espace de dimension 3 sur un plan de dimension 2, lui-même engendré par deux vecteurs de directions indépendantes

l'une de l'autre e_1 et e_2 . On suppose également bien établie la manière dont sont projetés sur ce plan les vecteurs $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

Autrement dit, on connaît la valeur numérique des coefficients a_{ij} suivants :

$$f(\epsilon_1) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2$$

$$f(\epsilon_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

$$f(\epsilon_3) = a_{13} e_1 + a_{23} e_2$$

Comme $f(k \epsilon_i) = k f(\epsilon_i) = k (a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2) = k a_{1i} e_1 + k a_{2i} e_2$,

$$f(W) = f(x \epsilon_1 + y \epsilon_2 + z \epsilon_3) = (x a_{11} + y a_{12} + z a_{13}) e_1 + (x a_{21} + y a_{22} + z a_{23}) e_2$$

ce qu'on présente aussi sous la forme :

$$f(W) = w_1 e_1 + w_2 e_2$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ainsi, la donnée des coefficients de la matrice des a_{ij} permet de connaître la valeur des composantes du vecteur projeté en fonction de celles du vecteur à projeter.

2. Perspective classique à un point et géométrie projective

2.1 Eléments de géométrie

Nous nous plaçons maintenant dans la situation où la source de lumière est à distance finie de l'observateur.

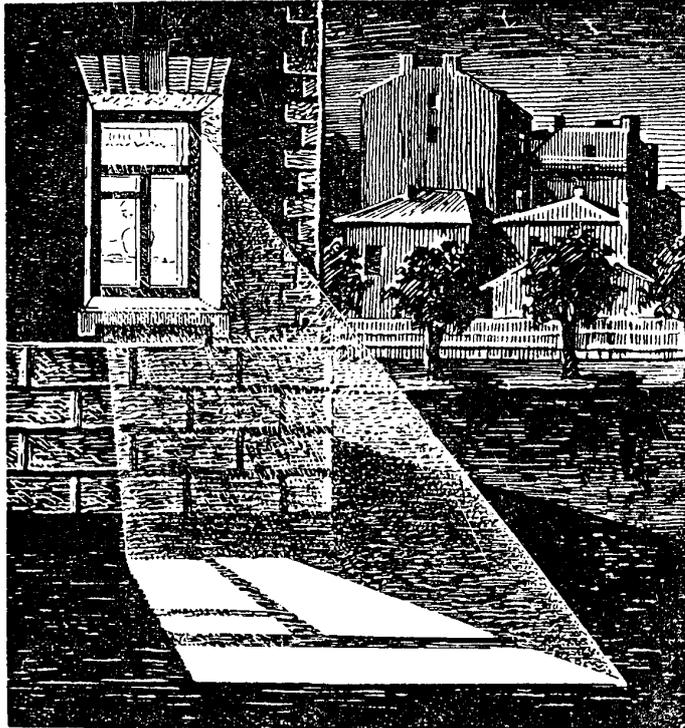


Image 4
Empruntée à [28]

Avant toutefois de quitter le cas euclidien précédent, notons une propriété significative.

Dans ce cas euclidien, nous venons d'observer que les deux triangles rectangles OHB et $OH'B'$ aux côtés parallèles HB et $H'B'$, OB et OB' , OH et OH' sont semblables.

Si les triangles OAB et $OA'B'$ ne sont pas rectangles, mais possèdent les mêmes propriétés de parallélisme, l'égalité des proportions reste vraie, comme nous l'allons montrer :

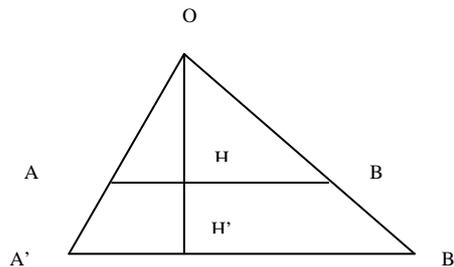


Figure 6

En effet, d'une part, pour les triangles OHA et $OH'A'$, on a par exemple $OH/HA = OH'/H'A'$ ou encore $OH/OH' = HA/H'A'$, et d'autre part pour les triangles OHB et $OH'B'$, on a également $OH/HB = OH'/H'B'$ ou encore $OH/OH' = HB/H'B'$.

On en déduit :

$$OH/OH' = HA/H'A' = HB/H'B' = (AH + HB)/(A'H' + H'B') = AB/A'B'$$

On procède de même avec les autres côtés de sorte que finalement on obtient l'égalité des proportions des côtés :

$$AB/A'B' = OA/OA' = OB/OB' = OH/OH'$$

On peut maintenant accoler plusieurs couples de triangles semblables à côtés parallèles pourvu qu'ils aient un côté en commun comme dans la figure de gauche ci-dessous. Sont accolés les couples $OPR/OP'R'$ et $OPQ/OP'Q'$. Alors le couple de triangles OQR et $OQ'R'$ est un couple de triangles semblables à côtés parallèles.

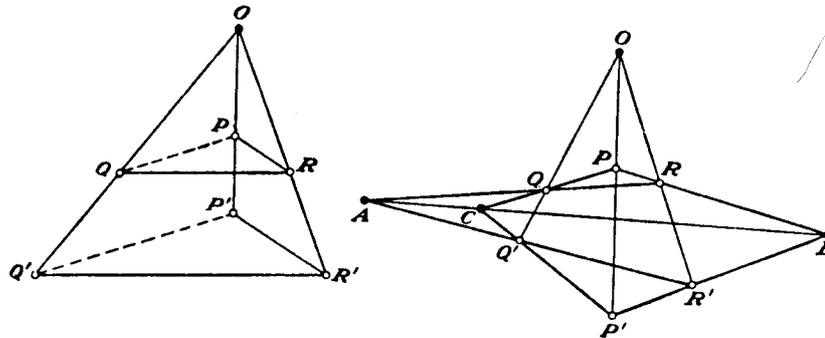


Figure 7

Empruntée à *Projective Geometry* by Coxeter

En effet, du fait que les deux premiers couples sont semblables, on a en particulier $OQ/OQ' = OR/OR'$. Si les côtés QR et $Q'R'$ n'étaient pas parallèles, on mènerait par exemple par R la parallèle à $Q'R'$, elle couperait OQ' en Q'' , et l'on aurait par l'énoncé direct du théorème de Thalès $OQ/OQ'' = OR/OR'$, par ailleurs égal à OQ/OQ' , par conséquent Q'' est Q' .

Une autre manière de présenter la figure et sa propriété, *sans référer explicitement à des considérations métriques*, est de dire que :

si on a deux couples de côtés parallèles tels que $(PR, P'R')$ et $(PQ, P'Q')$ de sorte que les trois droites portant QQ' , PP' et RR' sont concourantes (en O), alors le troisième couple de côtés $(RQ, R'Q')$ est également un couple de côtés parallèles.

Notons qu'on peut aussi voir cette figure dans l'espace ordinaire : PR et PQ y définissent un plan, tout comme $P'R'$ et $P'Q'$, ces deux plans étant parallèles. Ils coupent alors le plan contenant les triangles OQR et $OQ'R'$ selon deux droites parallèles.

Passons maintenant à l'examen de la figure de droite. On y voit :

les deux triangles PQR et $P'Q'R'$; ils sont quelconques mais une propriété les lie : les droites portant les sommets en correspondance, à savoir QQ' , PP' et RR' , sont également concourantes en O . Alors les droites portant, RQ et $R'Q'$, PR et $P'R'$, QP et $Q'P'$, se coupent respectivement aux points A , B et C , qui, point essentiel, sont alignés.

Ce fait, qui apparaît pour la première fois dans la littérature en 1648, porte le nom de « théorème des deux triangles (PQR et $P'Q'R'$) homologues de Desargues » (1593-1662). Dans les deux cas de figure que nous avons considérés, le point O peut représenter l'œil d'un observateur, il est appelé alors *centre de perspective*, et les triangles PQR et $P'Q'R'$ sont également dits être *en perspective*, également *homologues*.

Nous allons voir rapidement que la situation physique représentée par la figure de gauche est un cas particulier d'une situation physique plus générale, représentée par la figure de droite, celle-ci n'étant qu'une représentation de la figure spatiale suivante, tronquée par suppression de la représentation des plans supports des différents triangles :

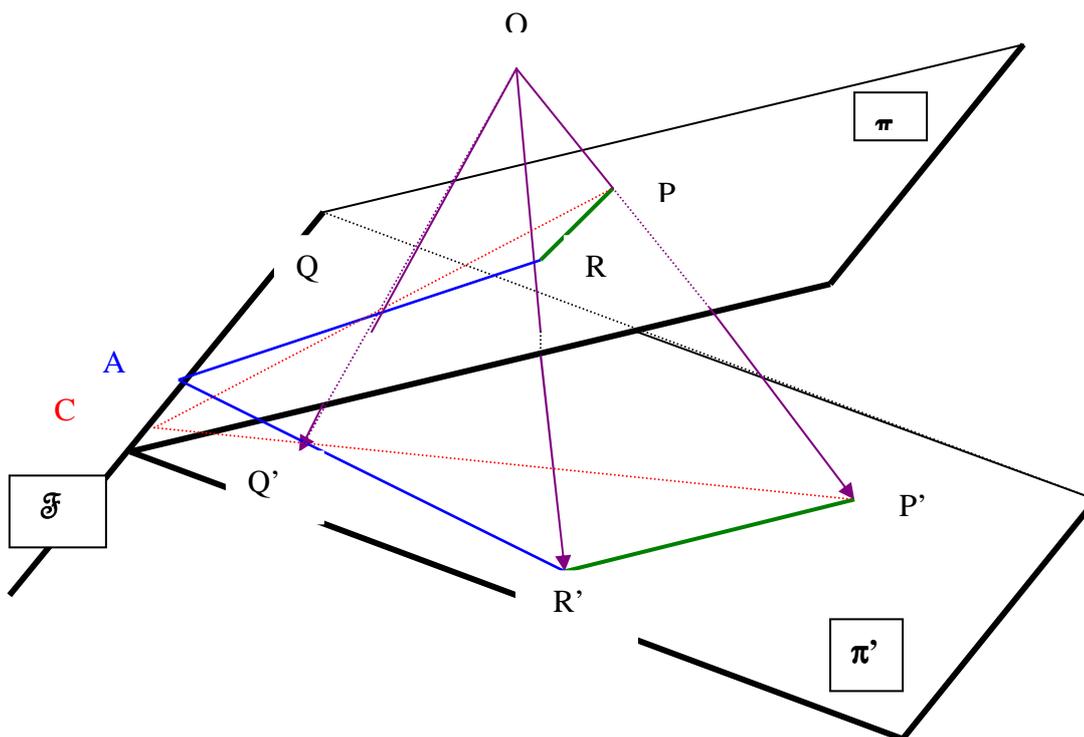


Figure 8

Trois plans en position générale dans l'espace usuel se rencontrent en un point. C'est le cas ici : le point A par exemple est à l'intersection du plan défini par les droites OQ et OR , du plan π car il se trouve sur la droite QR de ce plan, du plan π' étant sur la droite $Q'R'$ de ce plan : il se trouve en particulier à

l'intersection de ces deux plans π et π' , qui est une droite \mathcal{F} . Il en est de même pour B et C.

Interprétons ici O tant comme source lumineuse qu'œil d'un observateur : le triangle P'Q'R' apparaît alors comme l'ombre sur l'écran plan π' du triangle PQR situé dans le plan π , il est son homologue. On est en présence d'une *projection dite centrale ou conique de centre O*.

La droite \mathcal{F} est appelée *l'axe de l'homologie* car elle est *invariante* par la projection conique. On peut l'appeler aussi la *ligne de fuite*, voire la *droite «à l'infini»*, puisque lorsque l'on fait bouger l'un des plans de sorte qu'il devienne petit à petit parallèle à l'autre, leur droite d'intersection s'éloigne indéfiniment. On retrouve alors la configuration représentée par la figure de gauche.

Soyons plus concret, représentons notre observateur, notre peintre dans la réalité coutumière : il est debout, son œil est à la hauteur $h = HO$ du sol, le plan π , il regarde autour de lui les objets, délimités par leur contour, sous forme de lignes, courbes ou non.

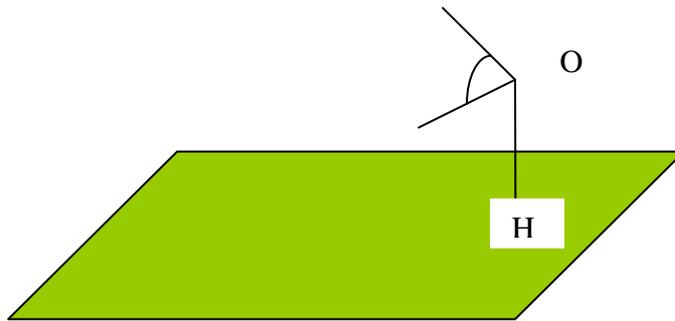


Figure 9

Face à lui un écran transparent, ou sa toile, perpendiculaire au sol, sur lequel il va représenter les objets derrière l'écran. Artiste de la Renaissance, il voudra atteindre une certaine perfection dans la qualité de sa représentation, notamment

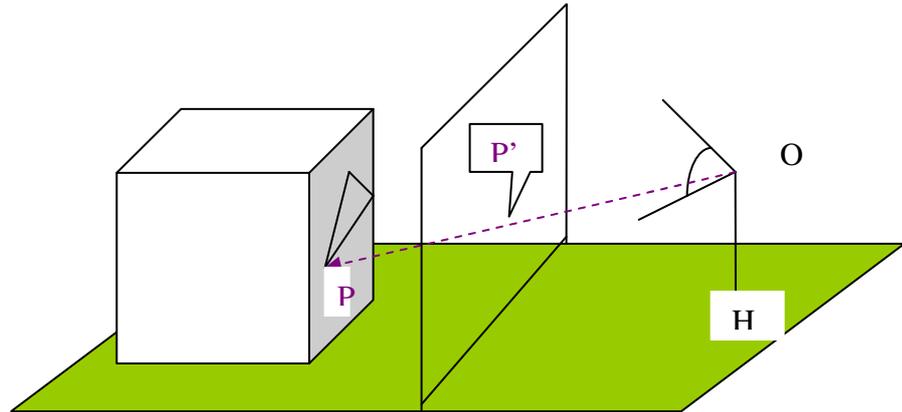


Figure 10

parvenir à donner l'illusion de la réalité d'abord par le respect apparent de la forme d'une part, également des proportions que nous-mêmes assignons aux objets qui nous environnent d'autre part.

Notons par \mathcal{P} le paysage que le peintre reproduit en \mathcal{P}' sur sa toile, P un point courant du paysage, P' le point correspondant sur la toile.

Appelons *ligne de terre* la droite d'intersection du plan vertical contenant la toile avec le plan du sol. Elle sera l'axe X d'un repère tridimensionnel dont on placera l'origine O' à l'intersection des deux plans précédents et du plan vertical passant par l'œil du peintre et perpendiculaire également au *plan de l'écran* ou encore *plan du tableau*. La distance O'H entre le peintre et sa toile, la *distance focale*, est notée en général par la lettre f . L'intersection, avec le plan du tableau, du *plan horizontal* (parallèle au plan du sol) passant par l'œil du peintre est appelée sa *ligne d'horizon*.

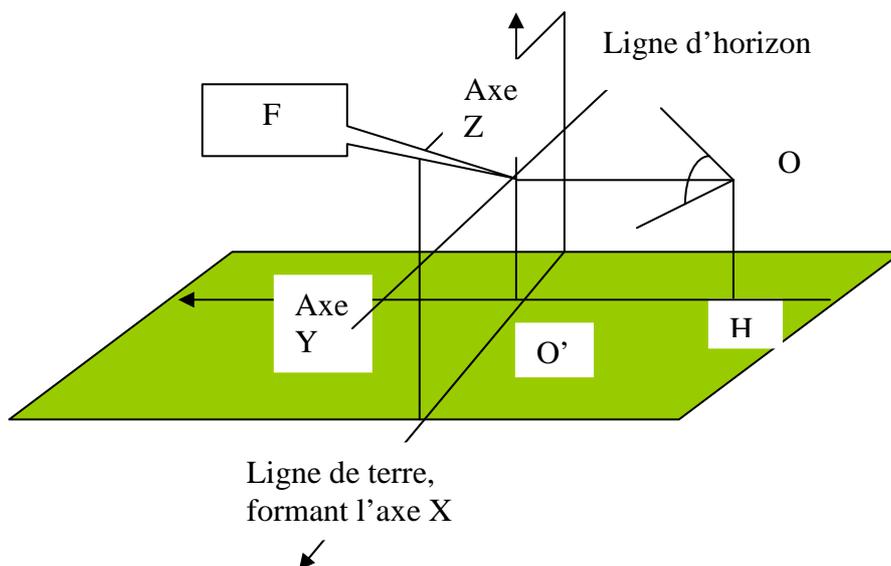


Figure 11

2.2 Représentation de quelques droites significatives

Décrivons maintenant ce que peut voir le peintre sur son écran, en particulier les droites qui définissent les contours d'objets simples : ces faits ont été établis par les mathématiciens et peintres de la Renaissance.

2.2.1 On constate d'abord immédiatement par la géométrie qu'une droite (rouge) parallèle à la ligne de terre sera représentée sur la toile par une droite qui lui est également parallèle, et qu'une droite (bleue) perpendiculaire au sol aura pour image sur cette toile une droite également perpendiculaire à ce plan. (Il suffit de considérer l'intersection, avec le plan de l'écran, des plans respectifs formés par les droites rouge ou bleue et l'œil du peintre).

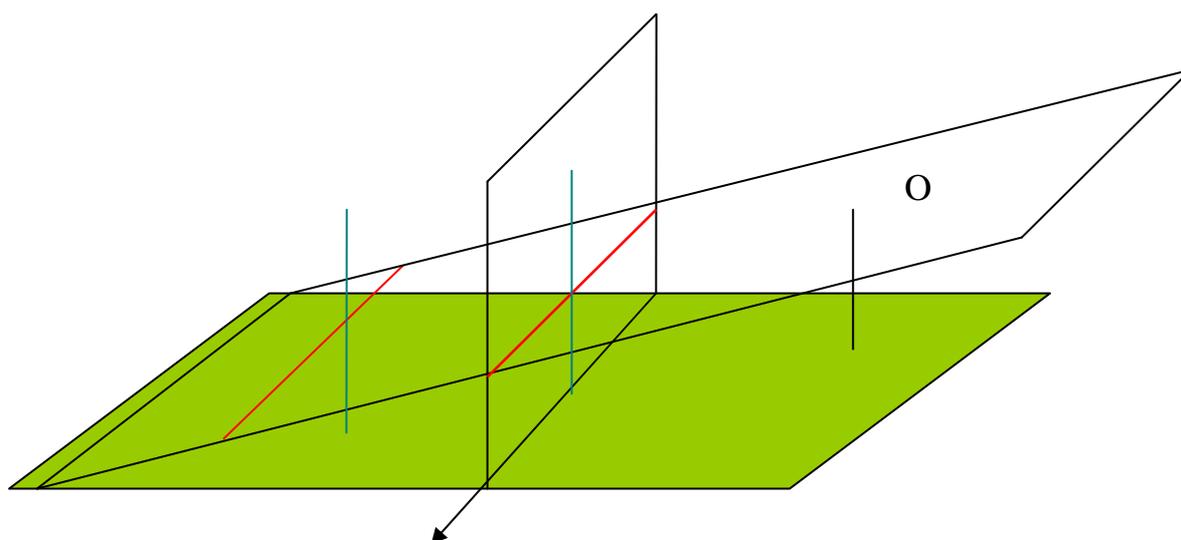


Figure 12

2.2.2 Pour trouver l'image sur l'écran d'autres droites, nous allons utiliser leur représentation numérique, à partir des coordonnées précisant un point quelconque et son image, et que voici :

Projetons le plan vertical défini par les points O, H et P, sur le plan YO'Z : le point P, situé à la hauteur z , est projeté en P_z de même hauteur, le point P', situé à la hauteur z' , est projeté en P'_z de même hauteur, de sorte que, par le théorème de Thalès :

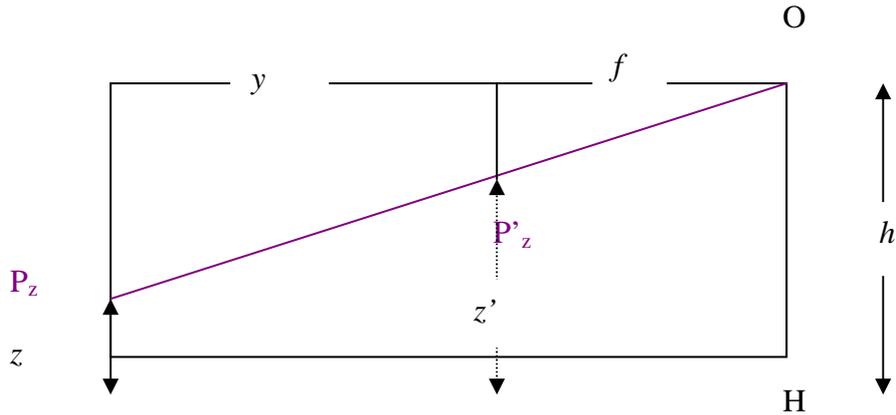


Figure 13

$$(h - z') / (h - z) = f / (y + f) \quad ^4$$

Projetons maintenant P et P' sur le plan du sol, respectivement en P_x et P'_x :

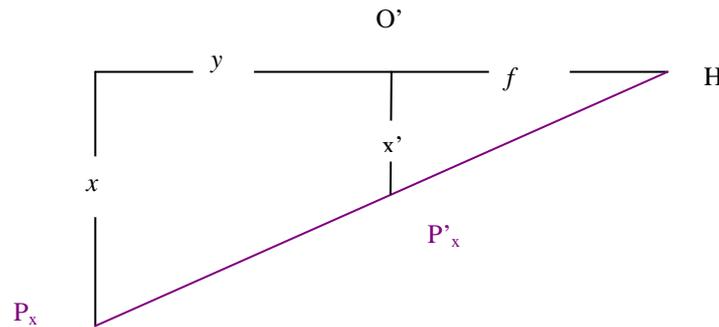


Figure 14

Par le théorème de Thalès : $x' / x = f / (y + f) = (h - z') / (h - z)$ (T)

Ces relations déterminent la position de P', une fois connue celle de P. La quantité $f / (y + f)$ est appelée la *profondeur* de la perspective.

2.2.3 Soit maintenant une droite perpendiculaire à l'écran, elle est parallèle à l'axe Y. Elle rencontre l'écran (X, Z) en un point de coordonnées (a, b). Un

⁴ Souvent, le peintre est assis près du sol, de sorte qu'on fait souvent l'approximation $h = 0$. Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} x' &= x f / (y + f) \\ z' &= z f / (y + f). \end{aligned}$$

Plaçons-nous dans une situation un peu plus générale que celle que nous venons d'examiner, en ce sens que le plan de l'écran, n'est plus le plan XO'Z, mais un plan parallèle, situé à la distance y' du plan de référence. Le théorème de Thalès s'écrit alors :

$$x' / x = (f + y') / (f + y) = (h - z') / (h - z) \quad (\text{TG})$$

point courant de cette droite a pour coordonnées (a, y, b) . Que voit le peintre ?

Nous l'allons établir par l'équation de la droite image, à partir de la relation (T) où $x = a, z = b$, qui nous donne :

$$x' = a f / (y + f) \quad (1)$$

$$x'/a = (h - z') / (h - b) \quad (2)$$

La relation (2) est l'équation de l'image de la droite sur l'écran (X, Z) . Quand y tend vers l'infini, la relation (1) nous montre que x' tend vers 0, ce qui implique alors que $z' = h$.

Ainsi toutes les perpendiculaires à la toile paraissent provenir du « centre » de cette toile, le point F $(0, 0, h)$, appelé le *point de fuite principal*, à la fois projection de O sur le plan de l'écran parallèlement au plan du sol, et image du point à l'infini S $(0, \infty, h)$.

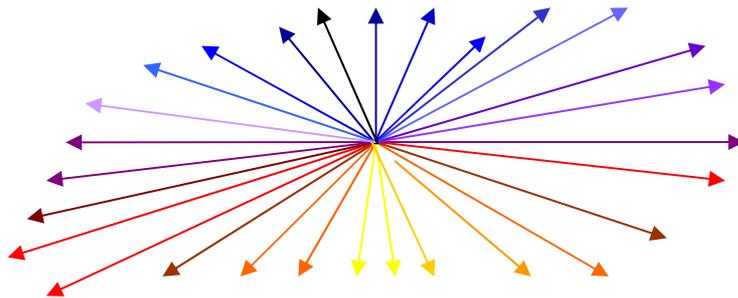


Figure 15

F, situé sur la ligne d'horizon, est appelé un *point de fuite secondaire*.

Le point S est analogue à un soleil, une source de lumière située à l'infini, qui envoie ses rayons perpendiculairement au plan de l'écran, et dont l'image sur l'écran devient le centre de la toile d'où surgit la lumière dans toutes les directions.



**Claude Gellée dit Le Lorrain
Port de mer au soleil couchant (1639)**

Image 5

2.2.4 Examinons maintenant l'image sur l'écran d'une droite quelconque située dans le plan du sol. Elle a pour équation :

$$z = 0 \quad y = mx + p.$$

De la relation (T) on déduit que $h - z' = (h - z) f / (y + f)$ et donc que :

$$z' = h - (h - z) f / (y + f) \quad (\text{Z})$$

La relation (Z) devient alors, puisque $z = 0$,

$$z' = h y / (y + f)$$

soit

$$y = - f z' / (z' - h)$$

On en déduit que

$$f + y = f + f z' / (z' - h)$$

Comme par ailleurs $x'/x = f/(y + f)$ ou encore $x = x' (f + y)/f$, l'image de la droite du plan du sol a pour équation :

$$f z' / (h - z') = m x' (f + y) / f + p$$

soit, en remplaçant $f + y$ par la valeur que l'on vient de calculer :

$$f z' / (h - z') = m x' [f + f z' / (z' - h)] / f + p$$

Après simplification, il vient :

$$z' = m h x' / (f + p) + p h / (f + p)$$

Au niveau de la ligne d'horizon pour laquelle $z' = h$, cette relation devient :

$$f + p = m x' + p \quad \text{soit} \quad x' = f / m.$$

Autrement dit, toutes les droites au sol de même pente m passent par le point de fuite secondaire $(f/m, 0, h)$. Ces points sont parfois appelés des points de distance.

De la sorte, il est facile de représenter sur la toile un carrelage posé sur le plan du sol et dont les carreaux carrés sont alignés selon des droites à 45° par exemple par rapport à l'axe X : la pente de ces droites valant 1 ou -1 , leurs images sur la toile passent par les points C et $-C$ de la ligne d'horizon de coordonnées $C = (f, 0, h)$ et $-C = (-f, 0, h)$.

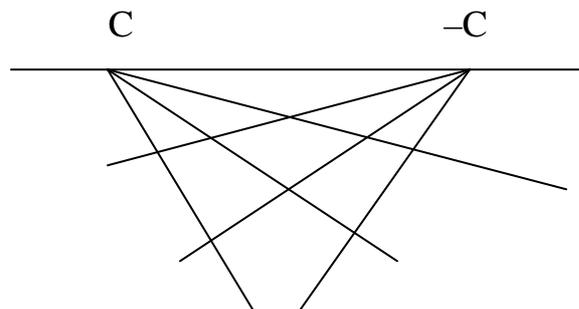


Figure 16

Voici une autre démonstration géométrique et simple de ce fait.

Considérons, dans le plan horizontal passant par l'œil du peintre O et parallèle au plan du sol, une droite quelconque OC coupant la ligne d'horizon en un point C. Deux plans quelconques contenant OC coupent le plan du sol en deux droites Δ_1 et Δ_2 parallèles à la droite OC : Δ_1 et OC par exemple sont situées dans un même plan, mais parallèles puisque également situées dans deux

plans parallèles sans point commun. Ces droites Δ_1 et Δ_2 coupent respectivement le plan du tableau en D_1 et D_2 , plan dans lequel elles ont pour image respective les droites CD_1 et CD_2 issues de C .

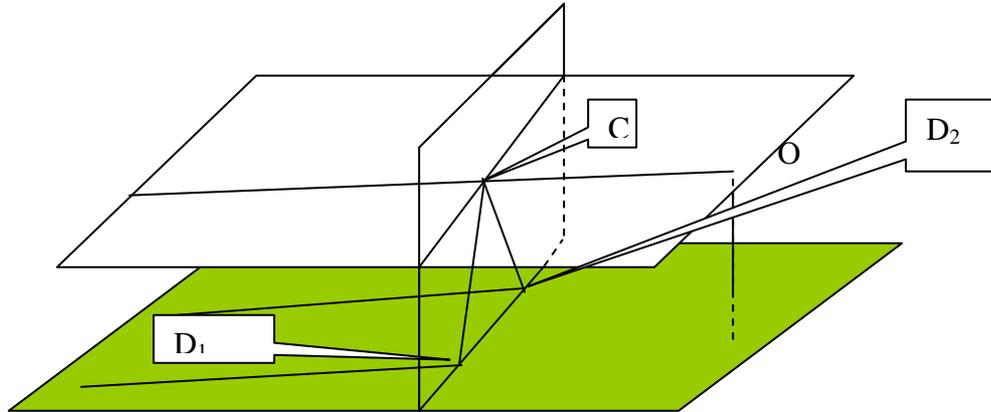


Figure 17

2.3 Perspective d'un cercle

C'est un fait bien connu, depuis Apollonius de Perge (262-190), que l'intersection d'un cône par un plan est soit un cercle, soit une ellipse, soit une parabole, soit une hyperbole, soit deux droites. Pour une inclinaison convenable

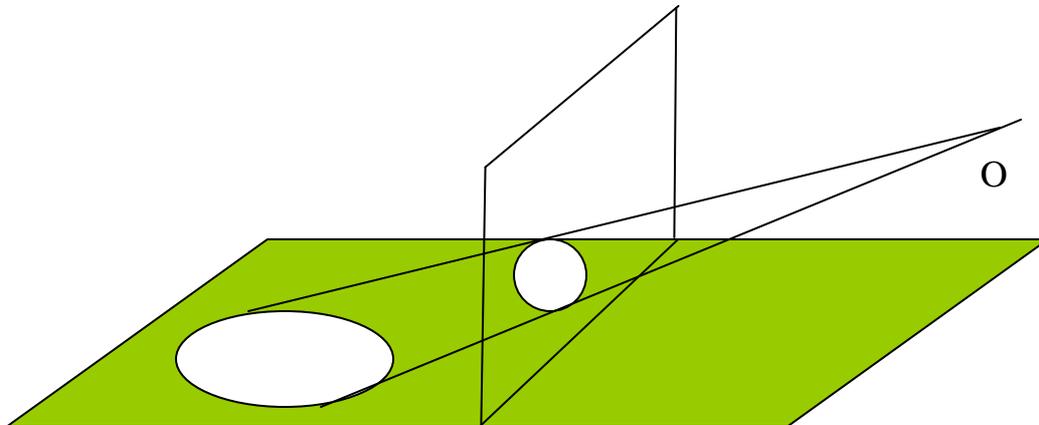


Figure 18

de l'angle au sommet du cône, l'image d'une ellipse tracée sur le plan du sol pourra être un cercle dans le plan du tableau, ou inversement, l'image d'un cercle tracé sur le plan du sol sera une ellipse dans le plan du tableau.

L'emploi de la représentation analytique d'un cône et d'un plan permet de retrouver rapidement les types d'intersection entre ces deux surfaces.

Un cône de base circulaire et d'axe vertical peut être représenté par l'équation

$$z = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

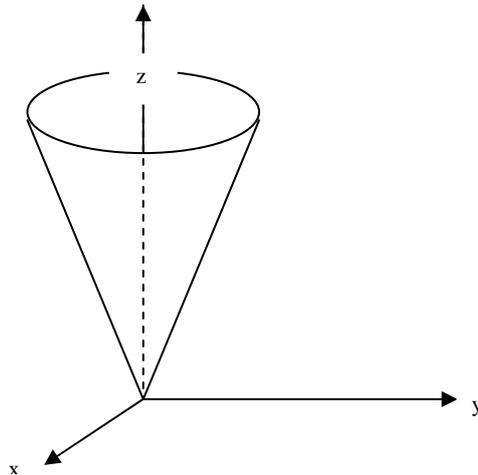


Figure 19

En effet, la section par le plan horizontal situé à la hauteur $z = r$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = r^2$.

En coupant le cône par le plan $x = 0$ ou $y = 0$, on obtient tout de suite comme intersection deux droites.

En coupant le cône par exemple par le plan $y = a$, on obtient l'équation d'une hyperbole $z^2 - x^2 = a^2$.

Dans le plan vertical (Y,Z) , une droite de pente m passant par le point $(0, 1)$ a pour équation $z = my + 1$. Cette équation est aussi celle du plan perpendiculaire à ce plan vertical et passant par cette droite. La substitution de z ou de y par sa valeur extraite de l'équation du plan dans l'équation du cône permet de retrouver immédiatement les différentes formes d'intersection selon la valeur de m : comprise entre -1 et $+1$, la section est une ellipse, devenue exceptionnellement cercle quand $m = 0$.

2.4 La notion d'espace projectif réel à deux dimensions ; un modèle de cet espace, le bonnet croisé.

Examinons l'**image 1** faite par Dürer ou encore la **figure 10**. Nous y voyons le point du tableau P' comme l'image du point P de la scène. Un autre point quelconque de la droite OP' admet ce même point P' comme image : tous les points de cette droite sont donc *équivalents* du point de vue de leur représentation sur le plan du tableau. C'est donc toute la droite qui est représentée par le seul point P' .

Toutes les droites de l'espace usuel tridimensionnel qui passent par O et frappent le plan du tableau sont représentées par ce tableau qui est un élément d'un espace bidimensionnel.

Définition : L'espace représentant la totalité des droites de l'espace usuel à trois dimensions issues de O est appelé *l'espace projectif (réel) de dimension 2*. Il est noté par exemple \mathbf{PR}^2 .

Le tableau que fait le peintre n'occupe bien sûr ici qu'une petite partie de cet espace \mathbf{PR}^2 .

Il existe deux modèles classiques de représentation de la totalité de \mathbf{PR}^2 : le modèle de Boy (cf par exemple [3], [11]) et le bonnet croisé dont nous allons décrire la construction.

Dans notre espace projectif, un point représente une droite passant par O. Observons que la totalité des droites de l'espace ordinaire qui passent par O rencontrent une sphère centrée en O en deux points opposés par rapport à O, dits *antipodaux*. Cette sphère n'est donc pas une très bonne représentation de notre espace projectif, puisqu'elle associe à un point de celui-ci, deux points sur la sphère. Une très bonne représentation doit avoir la propriété de bijectivité : tout point à représenter doit avoir un analogue unique dans l'objet qui le représente. On va donc déformer la sphère de manière à faire disparaître cette difficulté.

Divisons la sphère en trois parties : deux grandes calottes, symétriques par rapport à l'équateur, et un petit anneau central contenant cet équateur (**Figure 20**). Un point Q de la calotte supérieure a pour point antipodal un point Q' de la calotte inférieure. Pour représenter par un seul point une telle droite QQ', l'une des deux calottes suffit : on peut coller l'une des calottes sur l'autre, on dit qu'on les *identifie*.

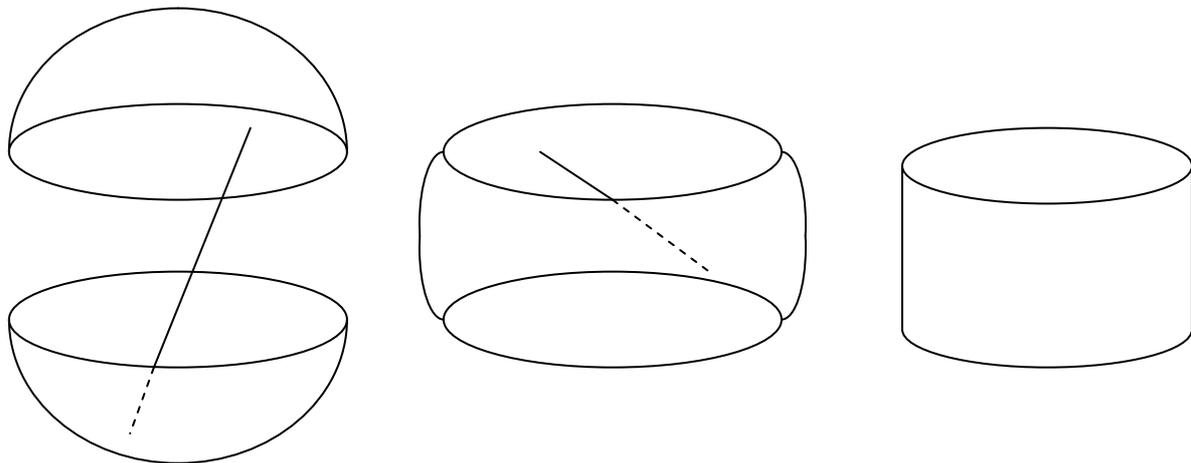


Figure 20

Reste à voir ce que l'on peut faire avec les points antipodaux de l'anneau, qui est analogue à un cylindre creux. On obtient ce cylindre creux en prenant une bande de papier, en commençant à lui donner une forme circulaire, puis finalement en accolant, en identifiant ses deux bords verticaux. On peut au contraire la couper verticalement en n'importe quel endroit et obtenir une bande quadrangulaire. Sur la figure sont montrés deux couples de points antipodaux Q et Q' qu'il faut

identifier ; le segment vertical de points rouges parcouru de bas en haut à gauche, doit être identifié au segment de points rouge parcouru de haut en bas à droite.

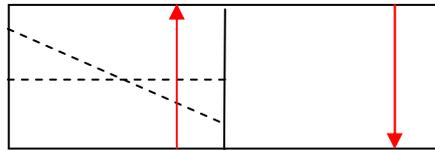


Figure 21

On obtient cette identification en torsadant le ruban de manière à accoler tête bêche les deux bords verticaux. On a alors obtenu un *ruban de Möbius*.

Il ne reste plus qu'à identifier, en les accolant, les bords respectifs de la calotte sphérique par exemple supérieure et du ruban de Möbius. Le résultat obtenu est appelé le *bonnet croisé*.

2.5 L'invariant métrique de la géométrie projective plane et l'homographie

Examinons maintenant la question du respect des proportions dans le cadre de cette représentation.

2.5.1 Plaçons-nous d'abord dans cet élément de plan projectif qu'est le tableau. Nous désignons ici par S le point de fuite principal d'où émergent quatre droites jaunes que coupent respectivement en A, B, C, D et A', B', C', D' deux droites transversales T et T'.

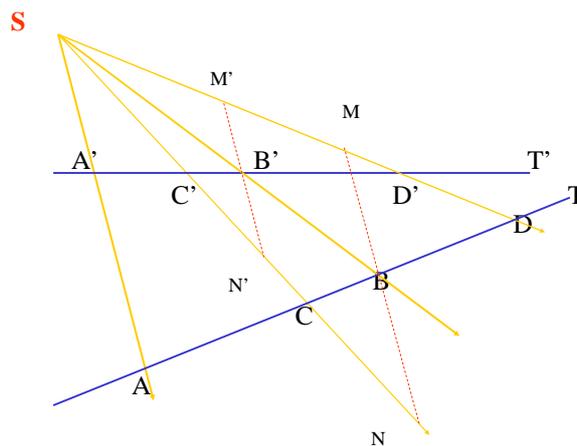


Figure 22

On mène par B et B' les parallèles à la droite SA'A. Elles coupent respectivement la droite SD'D en M' et M, la droite SC'C en N' et N. Les triangles D'A'S et D'B'M' étant semblables, $D'B'/D'A' = B'M'/A'S$.

Pareillement, les triangles $C'B'N'$ et $C'A'S$ étant semblables $C'B'/C'A' = B'N'/A'S$, d'où $(D'B'/D'A')/(C'B'/C'A') = B'M'/B'N'$. En procédant de la même façon avec les couples de triangles DAS et DBM d'une part, CBN et CAS d'autre part, on obtient que $(DB/DA)/(CB/CA) = BM/BN$. Mais par la similitude des triangles $SB'M'$ et SBM , $SB'N'$ et SBN , $B'M'/BM = SB'/SB = B'N'/BN$ d'où on déduit l'égalité des birapports :

$$(D'B'/D'A')/(C'B'/C'A') = (DB/DA)/(CB/CA)$$

Ainsi, en géométrie projective, c'est le double rapport ou birapport entre quatre points alignés qui est conservé, ne dépendant que du faisceau de droites et non du choix de la transversale.

Ce théorème de Desargues a été exposé par le graveur Abraham Bosse également en 1648.

Si par exemple D et D' tendent vers le point d'intersection de T et T' qui s'éloigne vers un point à l'infini, alors les deux droites deviennent parallèles, et l'on retrouve alors la conservation des proportions selon Thalès.

2.5.2 On traite ici la question des proportions dans le cas simple où l'objet à reproduire est tout entier situé dans un plan que nous appellerons le *plan observé*. Lorsque celui-ci est parallèle au plan de l'écran, le théorème de Thalès s'applique, et les proportions entre les différentes parties de l'objet sont conservées sur la toile.

Supposons au contraire quelconque le plan observé, et dans ce plan une droite rouge T : elle définit avec l'œil du peintre un *plan d'observation* qui coupe le plan de la toile en une droite mauve T' . Soient A, C, B, D quatre points significatifs de l'objet situés sur T , et A', C', B', D' les points correspondants situés sur T' .

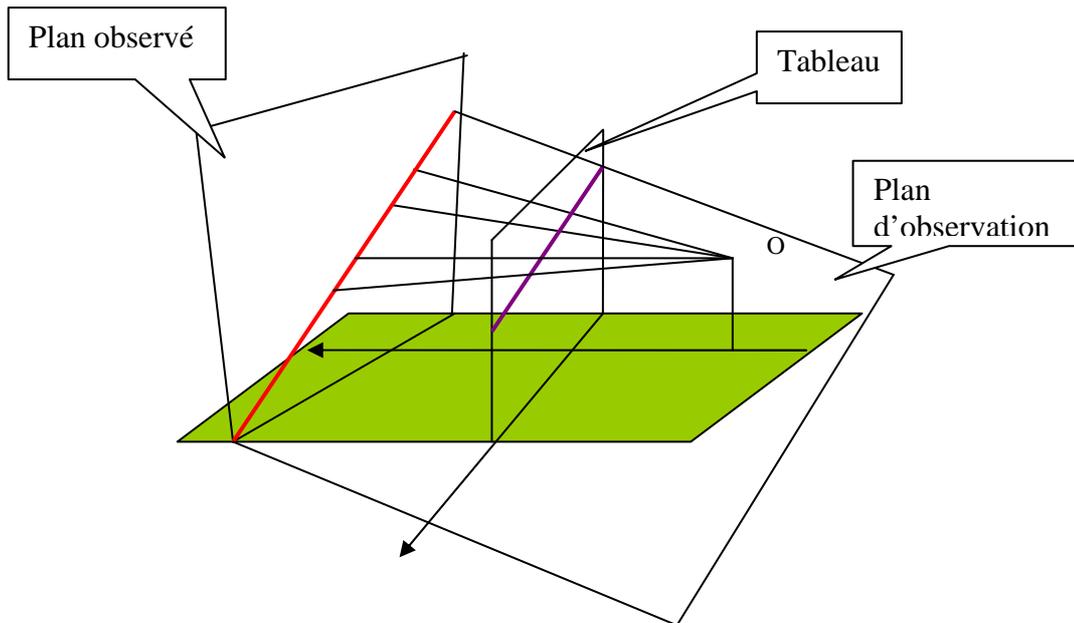


Figure 23

Alors, en remplaçant S par O , la même démonstration que tout à l'heure s'applique : est conservé le birapport

$$(DB/DA)/(CB/CA) = (D'B'/D'A')/(C'B'/C'A')$$

2.5.3 Si l'on déplace la figure par translation, ou bien si on la fait tourner, ou bien si l'on procède à des homothéties, la propriété d'invariance sera conservée.

Les trois points A , B et C étant représentés dans le plan par trois nombres convenables a , b et c , soit Z un quatrième point représenté par le nombre z . Le birapport de ces quatre points est par exemple :

$$[(z-a)/(z-b)] / [(c-a)/(c-b)] = z'$$

ou encore

$$z' = (z-a)(c-b) / (z-b)(c-a)$$

La transformation de z en z' est appelée une *homographie*. De manière générale, l'expression analytique d'une homographie est de la forme

$$h(y) = (\alpha y + \beta) / (\gamma y + \delta)$$

ou encore

$$h(y) = \alpha/\gamma + (\beta\gamma - \alpha\delta) / \gamma^2 (y + \delta/\gamma)$$

Une telle expression décrit géométriquement la combinaison d'une translation, d'une homothétie, d'une rotation et d'une dernière transformation géométrique l'inversion.

Soit alors h une homographie quelconque transformant a en $h(a)$, b en $h(b)$, c en $h(c)$, et z en $h(z)$. Le calcul par exemple montre que le *birapport* z' des quatre nombres a, b, c, z est invariant par l'homographie :

$$[(z-a)/(z-b)] / [(c-a)/(c-b)] = z'$$

$$z' = [(h(z) - h(a))/(h(z) - h(b))] / [(h(c) - h(a))/(h(c) - h(b))]$$

2.5.4 Nous allons maintenant introduire un système de coordonnées dites homogènes qui permettent de travailler numériquement sur le plan projectif.

L'espace projectif à 2 dimensions étant l'espace formé par l'ensemble des droites de l'espace usuel (dont la dimension est 3) qui passent par l'origine, il peut partiellement être représenté par l'ensemble des intersections de ces droites avec le plan $y = 1$. En normant la distance focale f de sorte qu'elle soit égale à 1, ce plan n'est alors autre que celui du tableau.

La donnée de coordonnées ($y = a, x = b, z = c$) permet de situer un point P de l'espace usuel par rapport à un repère donné dans cet espace. La droite passant par l'origine et ce point est l'ensemble des points de coordonnées (ma, mb, mc) .

On choisit donc de représenter cette droite par le point P' où elle coupe le plan $y = 1$, soit lorsque $m = 1/a$. Il a pour coordonnées $(1, b/a, c/a)$. Ces coordonnées s'appellent les *coordonnées homogènes* du point de l'espace projectif correspondant.

Dans ces conditions, les transformations planes standard, translations, rotations, homothéties, symétries peuvent être présentées sous forme matricielle :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$
Translation de vecteur (t_x, t_z)	Rotation d'angle θ	homothétie de rapport k	Symétrie par rapport à l'axe X

On peut, de la même façon, étant donné un espace vectoriel de dimension 4 ou supérieure, considérer l'espace des droites passant par l'origine, droites dites vectorielles. Ainsi, un point quelconque d'une droite vectorielle d'un espace vectoriel réel de dimension 4, \mathbf{R}^4 , a pour composantes ordinaires (x, y, z, t) : elle passe par le point $(x/t, y/t, z/t, 1)$, choisi comme représentant cette droite. L'espace projectif \mathbf{PR}^3 est l'espace formé de tels points, représentant toutes les droites vectorielles de \mathbf{R}^4 : c'est à nouveau un espace de dimension 3. Les

matrices des transformations linéaires s'écrivent, sauf pour les rotations, de manière exactement analogue à la précédente.

2.6 Éléments caractéristiques des formes et des ombres

Si les artistes de la Renaissance ont très tôt traité des ombres et des anamorphoses sous un angle pratique, ce n'est qu'au siècle dernier que les outils mathématiques de leur étude ont été développés. On consultera par exemple sur le site de Francesco Decomite [15] la section « Anamorphoses » (<http://www.lifl.fr/~decomite/anamorphoses/generalMethodF.html>).

Soit un objet Ω dont un faisceau lumineux, supposé d'abord cylindrique, projette l'ombre sur un plan. Soit f l'application de projection et $f(\Omega) = \Omega'$ l'ombre, que nous qualifierons de cylindrique, dont le bord $\delta\Omega'$ est le *contour apparent* de l'objet dans la direction des rayons parallèles.

Prenons l'exemple simple d'un objet Ω sphérique. Son ombre est un cercle dans la direction des rayons perpendiculaires au plan de projection, une ellipse de plus en plus allongée et lointaine au fur et à mesure que l'inclinaison des rayons par rapport à ce plan s'affaiblit (cf la **Figure 18**). Elle disparaît, étant rejetée à l'infini, quand la direction des rayons est parallèle au plan de projection.

Comme a priori l'objet Ω est bien moins simple qu'une sphère, on le découpera virtuellement en parties élémentaires dont on considèrera les ombres, et on recollera ensemble les ombres partielles pour obtenir la vision complète de l'ombre globale.

La théorie mathématique des ombres cylindriques sur des hyperplans est connue et s'inscrit dans le cadre de la théorie des singularités des applications différentiables (par exemple [5], [9]).

Nous allons ici seulement rapporter un premier résultat élémentaire d'un point de vue physique, valide lorsque le plan de projection est celui du tableau du peintre.

Localement, on est en présence de ces deux seules solutions :

- ou bien la forme locale du contour apparent ne possède aucune sorte de singularité et se présente alors sous un aspect rectiligne ou arrondie.
- ou bien cette forme locale possède une singularité de sorte qu'en son voisinage, l'aspect de la forme est l'un des suivants :



Figure 24

Il est remarquable que ces dessins, donnés dans [10], ont, pour la plupart d'entre eux, été également présentés par Dürer pratiquement cinq siècles auparavant⁵.

Une figure élémentaire, très appréciée par les mathématiciens et que l'on voit dans la liste précédente, est appelée le *cusp*.



Figure 25

Imaginons une feuille dont le bord partiel est la courbe définie par

$$y = t, \quad x = t^2, \quad z = t^3$$

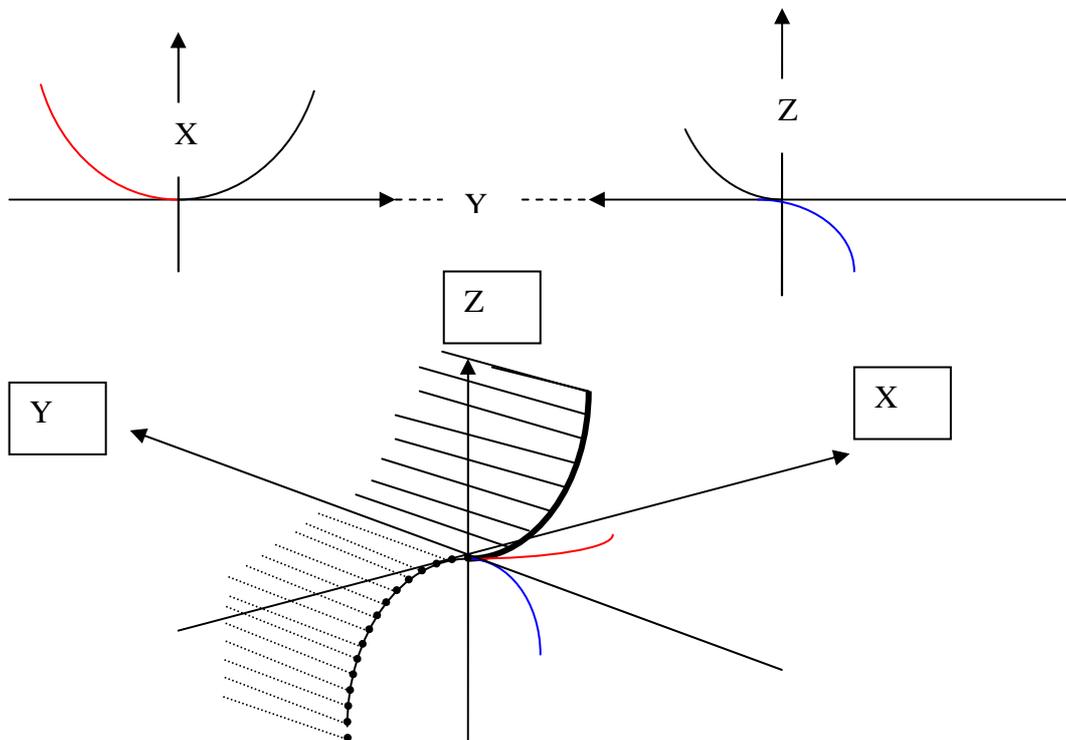
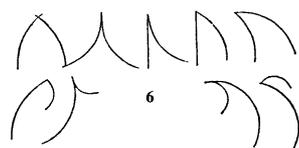


Figure 26

⁵ Voici ces dessins, rencontrés lors de la préparation de ce texte, et extraits du livre de Dürer traduit par Jeanne Pfeifer [14] :



où t est un paramètre qui varie continûment, disons entre -10 et $+10$. De chaque point de cette courbe part, toutes orientés dans la même direction, une parallèle au plan XY : elle représente la trace d'une section de la feuille par un plan parallèle au plan horizontal passant par le point donné.

Dans le plan XZ , l'ombre de la feuille a pour bord l'élément de courbe définie par les seules équations

$$x = t^2, \quad z = t^3$$

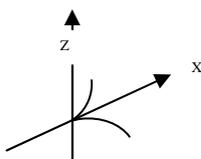


Figure 27

c'est-à-dire le cusp représenté sur la figure 25.

A partir de cet exemple, on peut étudier la déformation de l'ombre en fonction de la direction du faisceau.

2.7 Zones de forte brillance

Une zone peut apparaître plus ou moins brillante selon la quantité de lumière incidente qui est réfléchiée.

On peut même être en présence de zones de surbrillance le long de caustiques où deux rayons réfléchis voisins deviennent tangents. Classifiées selon leurs symétries par V. Arnold (par exemple [4]), les formes de ces caustiques dans notre espace usuel sont aujourd'hui bien établies. On y retrouve les fameuses sept catastrophes de Thom.

2.8 Représentation des surfaces courbes. Contre-image d'un tableau

Nous ne décelons d'un objet volumique quelconque Ω qu'une partie de sa surface appelée en langage mathématique son bord. Les jeux d'ombre et de lumière nous permettent d'inférer la partie « visible » du domaine qu'il occupe.

Un paysage est peuplé de tels objets. La donnée des relations (T) (page 15, §3.2.2) permet, en principe, d'obtenir numériquement l'image de chaque point de la surface visible de tout objet, et ainsi de construire la projection du paysage sur un écran plat pour lequel la distance focale f reste constante.

On peut procéder de la même façon pour un écran quelconque non plat, mais dans ce cas la distance focale change pour chaque point.

Sauf dans des cas très particuliers, l'obtention numérique de ces représentations est évidemment illusoire, supposant la connaissance de toutes les distances entre tous les points des objets et l'écran.

En pratique, l'œil du peintre procède à des estimations. Leur exactitude fonde la qualité principale du dessinateur.

De manière générale, l'œil qui observe un objet suit un mouvement saccadé, le regard étant dirigé vers les singularités de l'objet et leurs voisinages, enregistrés les uns après les autres. Le peintre procède ainsi inconsciemment par découpe du paysage en zones locales, appelées cartes locales en langage des mathématiciens. Ces cartes sont assez petites pour être assez correctement assimilées à des éléments plans. On fabrique ainsi en quelque sorte une approximation polyédrale du paysage, chaque petite face du polyèdre correspondant à une zone locale. Chacune de ces faces planes est représentée approximativement sur l'écran, plan ou lui-même décomposé en polyèdres, selon les règles de la perspective linéaire.

Nous verrons dans le chapitre suivant une mise en pratique de cette technique de représentation.

Tout récemment, la question suivante a été abordée [6] : peut-on déterminer, à partir d'un tableau et des seules courbes qui y sont présentes, les données exactes de la géographie du paysage fixé par le peintre ? La réponse est évidemment négative a priori puisqu'on ne connaît pas la hauteur h de l'œil du peintre par rapport au sol, et que deux points distincts, peut-être fort éloignés l'un de l'autre mais situés sur le même rayon visuel, déterminent le même représentant sur l'écran ; quant aux angles, en dehors de certaines orthogonalités, ils sont en général déformés. Cependant, dans certains cas particuliers plutôt simples, la représentation (le tableau) peut donner quelques indications sur la réalité, en particulier sur la distance focale à partir des points de distance symétriques, ou sur les objets plans du paysage réel.

Du fait que les distances perçues tendent à devenir égales, avec une approximation d'autant meilleure qu'elles sont plus grandes, les données du tableau peuvent donner des renseignements assez précis sur la disposition relative des éléments lointains.

La connaissance parfois possible de l'intersection avec le plan du tableau du plan contenant les objets (comme il se peut par exemple le plan du sol), intersection appelée axe d'homologie, permet de reconstituer géométriquement la disposition des objets réels ; par ailleurs, la conservation des birapports dans le plan d'observation (cf **Figure 23**) peut permettre d'obtenir des estimations métriques d'objets réels à partir d'autres objets réels dont les propriétés métriques sont connues.

CHAPITRE II

EMPLOIS PRATIQUES DE LA PERSPECTIVE CLASSIQUE⁶

Pas davantage que dans le précédent, il n'est véritablement pas question d'art dans ce chapitre. Son propos est de montrer sobrement le résultat graphique de l'emploi quelque peu formel de la perspective.

Un ouvrage plus complet, un gros volume, montrerait à la fois sa présence implicite ou explicite au cours des siècles dans l'œuvre des peintres, et de quelle manière elle a pu évoluer. On notera ce simple fait général : la mise en place du point de fuite principal au centre de symétrie du tableau a rapidement été abandonnée pour permettre de créer une vision dynamique du paysage beaucoup plus proche de la réalité.

1. Les principaux utilisateurs

Peintres, graveurs, dessinateurs, architectes, ingénieurs notamment militaires, tailleurs de pierre et sculpteurs, géographes.

2. Perspective à un point de fuite

Le peintre est face à un paysage éclairé par une source de lumière dont les rayons sont perpendiculaires à sa toile. D'après 2.2.2, ils sont représentés par des droites issues d'un seul point de fuite F dont la position peut être centrale (Alberti) ou non (Piero della Francesca).

Compte tenu de 2.2.1, les droites parallèles à la ligne d'horizon et celles qui sont perpendiculaires au plan du sol conservent leurs directions sur la toile. Un parallélépipède dont une face est parallèle à la toile sera alors représenté ainsi :

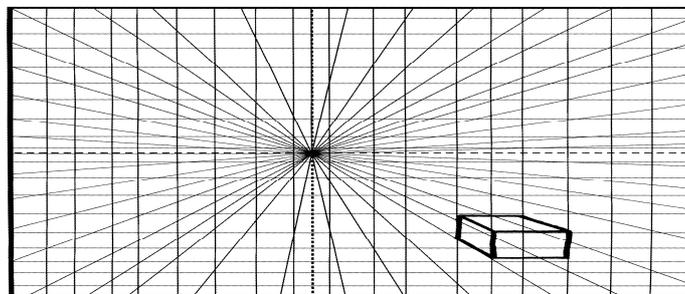


Figure 28

⁶ La quasi-totalité des figures et images de ce chapitre sont empruntées à une publication de Dick Termes intitulée « New perspective systems » (cf <http://termespheres.com/6-point-perspective/>)

Voici, ci-après, ce que verrait un peintre regardant le plafond d'une salle en étant situé sous son plancher transparent :

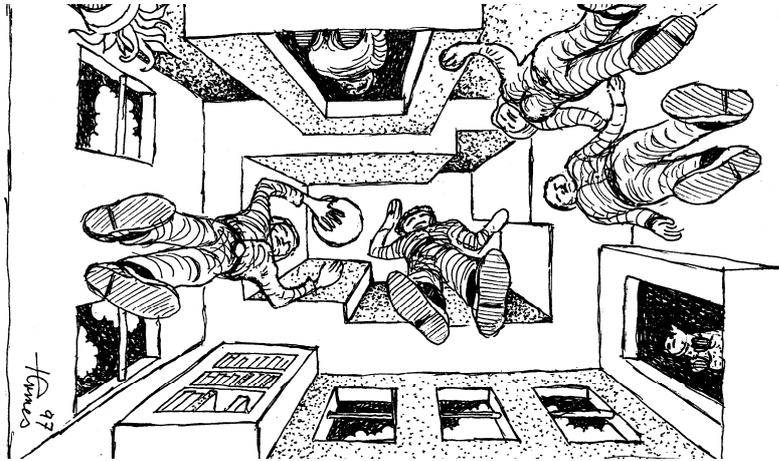


Image 6

Les peintres classiques ont surtout fait appel à ce type de perspective, ainsi d'ailleurs qu'à la perspective utilisant deux points de fuite.

En considérant chaque face d'un polyèdre comme la toile d'un peintre, on peut représenter sur ce polyèdre la totalité de son environnement visuel. On voit, par exemple, sur la figure ci-dessous, les faces d'un cube sur lesquelles sont portés le point de fuite central et le maillage établi de sorte qu'il se raccorde à ceux des faces adjacentes.

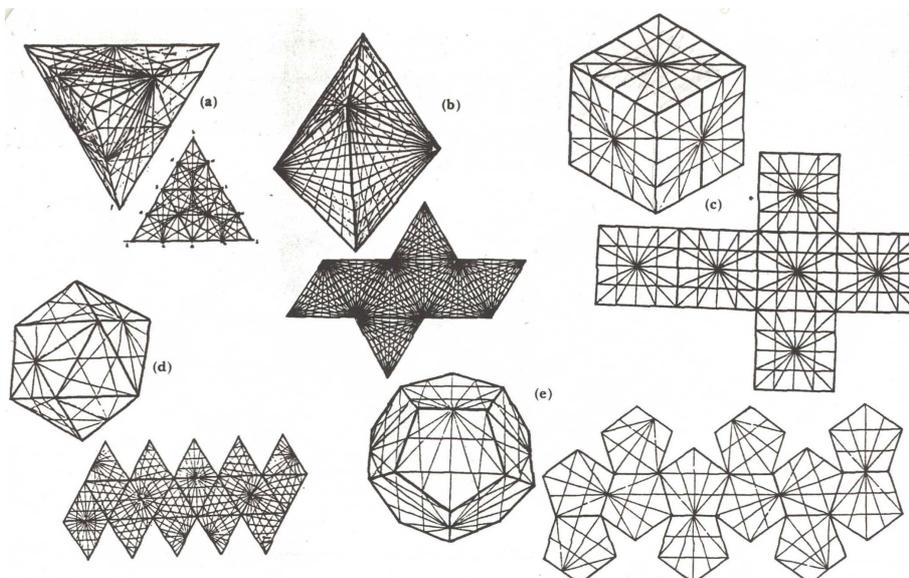


Image 7



Image 8

Les deux images⁷ ci-dessus, pliées selon la petite diagonale des parallélogrammes et assemblées, reconstituent un tétraèdre. Sur chacune des faces est représentée un quart de ce qui constitue l'intérieur complet d'une pièce, ses murs, son plafond, son sol.



Image extraite de <http://termespheres.com/explaining-some-of-my-older-ideas/>

Image 9

⁷ Elles proviennent d'un modèle à assembler que m'avait adressé Dick Termes, que j'ai le plaisir de remercier à nouveau.

3. Perspective à deux et trois points de fuite

On suppose la présence de deux sources différentes de lumière, chacune envoyant un faisceau de rayons parallèles. D'après 3.2.3, correspondant alors à chaque source un point de fuite secondaire sur la ligne d'horizon d'où semblent provenir les rayons lumineux.

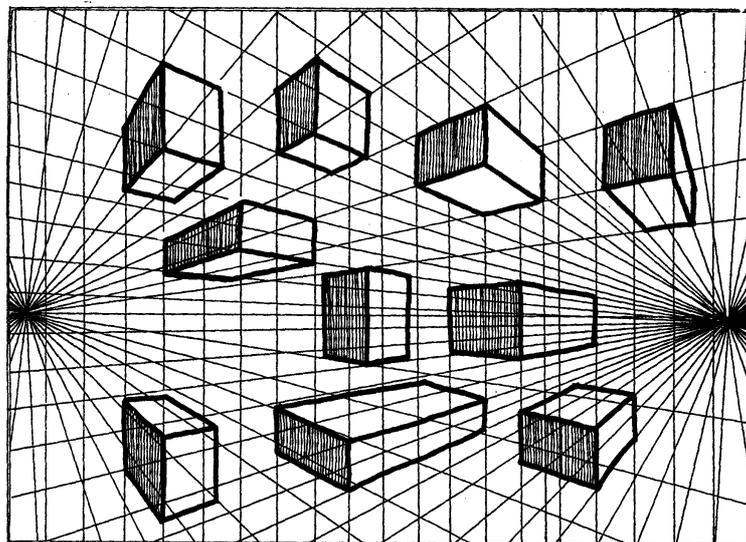
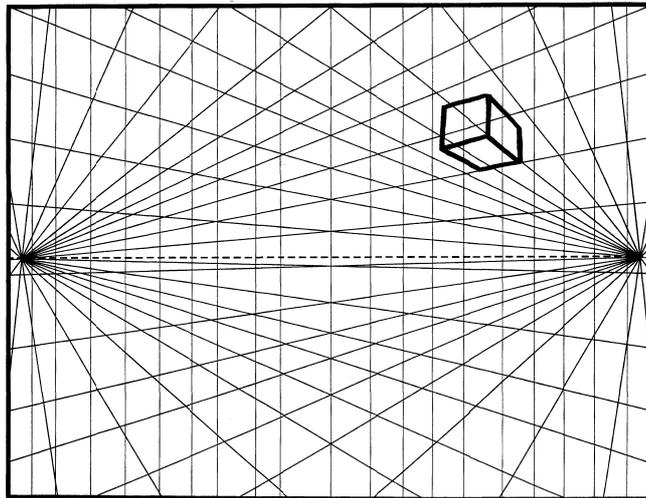


Figure 29

Un tel couple de points de fuite est bien adapté par exemple à la description d'un intérieur en lequel la lumière pénètre par deux fenêtres non situées dans un même plan :

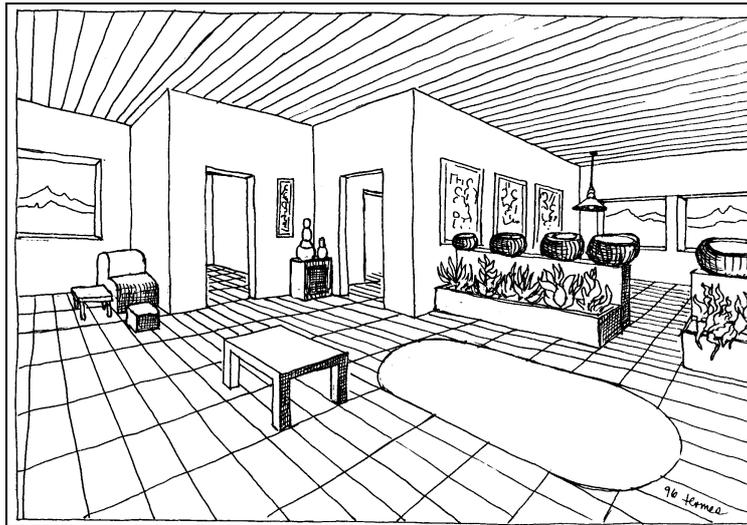


Image 10

On peut, dans le même esprit, envisager la présence de trois points de fuite, de trois sources de lumière, dans le cas par exemple d'une salle de théâtre éclairée par trois projecteurs, l'un en hauteur au centre de la scène, les deux autres au pied de la scène et sur chacun de ses côtés.

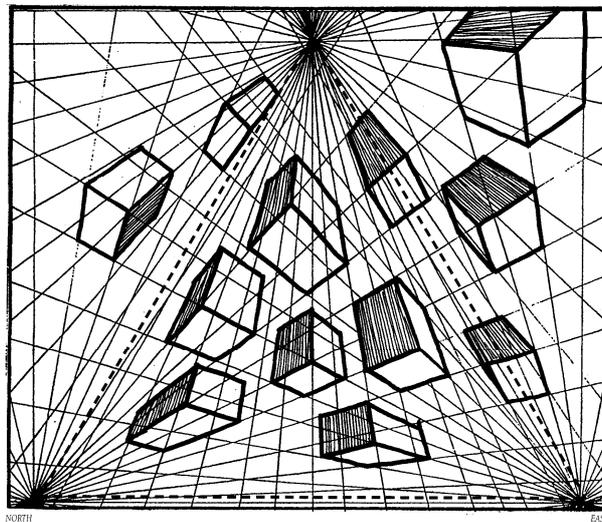


Figure 30

4. Critique de la perspective rectiligne classique : la perspective curviligne, six points de fuite

L'emploi de la perspective rectiligne a fait l'objet, dès le seizième siècle, de remarques critiques (Piero della Francesca, Leonardo da Vinci): le modèle n'est valable que dans certaines conditions d'observation, n'introduisant pas, par

exemple, des altérations de la représentation causées par le caractère apparent rectiligne de visées. C'est pourquoi les points de vue trop rapprochés ou les angles de visée trop importants ont été interdits.

De son côté, à la même époque, le savant philosophe Guillaume Postel prend conscience d'une certaine courbure de l'espace visible (cf l'article de Bouligand-Flocon-Barre [8]). Au siècle dernier, le peintre Maurits Escher et le graveur Albert Flocon développent des représentations faisant appel à plusieurs points de fuite bien disposés qui permettent de donner l'illusion plus ou moins accentuée de cette courbure. On voit bien, sur la photographie ci-dessous, mais probablement dû à l'optique de l'appareil photographique, un effet de courbure de certains gratte-ciels.



Image 11

Une solution consiste alors à reprendre la construction à trois points de fuite, et à faire émerger du point de fuite symbolisant le zénith, non plus des droites mais des courbes de la forme ellipses ou cercles.

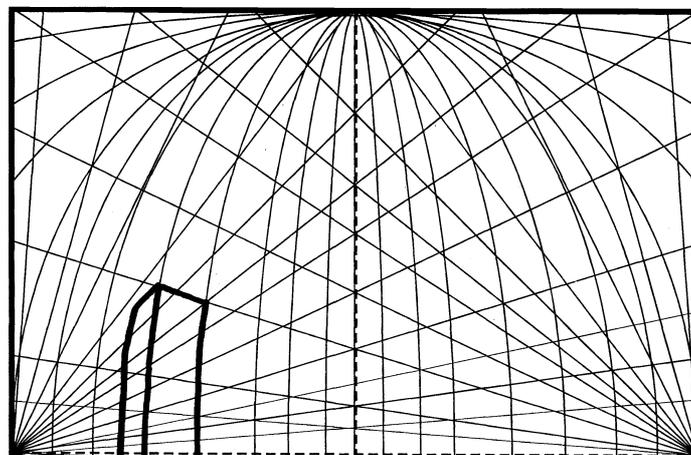


Figure 31

Il se trouve que, si l'on veut être assez fidèle à la réalité, ce point de fuite au zénith se situe bien en dehors du plan du tableau. Mais il ne s'agit plus, aujourd'hui, de reproduire la réalité observée de manière parfaite - les appareils photographiques le font très bien - mais simplement d'en donner une illustration qui parle tant à l'imagination qu'au rationnel.

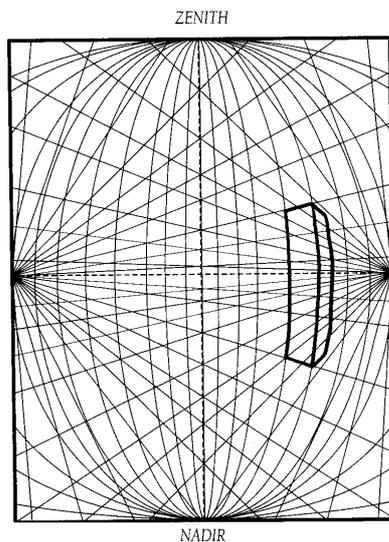


Figure 32

D'où la construction d'objets décoratifs comme ceux créés par l'artiste américain Dick Termes et ses émules.

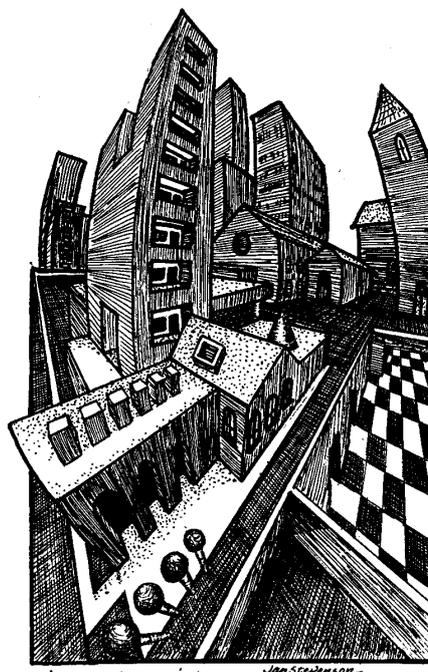
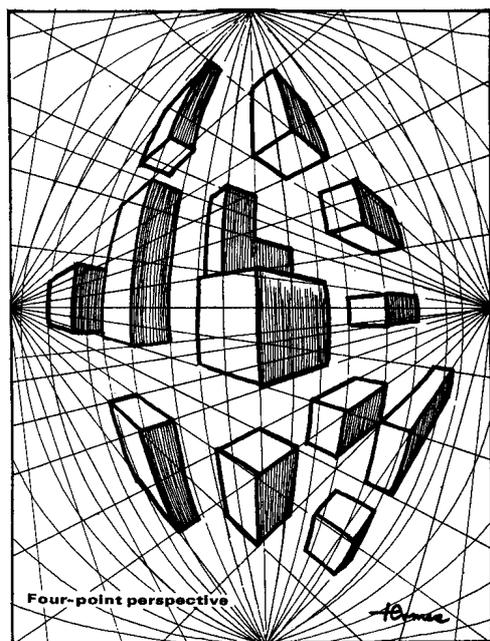


Image 12

De manière plus générale d'ailleurs, une légère courbure des rayons lumineux aussi bien est-ouest que nord-sud sera parfaitement adaptée à la représentation de vastes étendues. L'artiste américain Dick Termes s'est fait une spécialité de cette technique. Voici par exemple un jeu de maillage qu'il utilise pour représenter l'environnement d'un parallélépipède à base carrée ou circulaire :

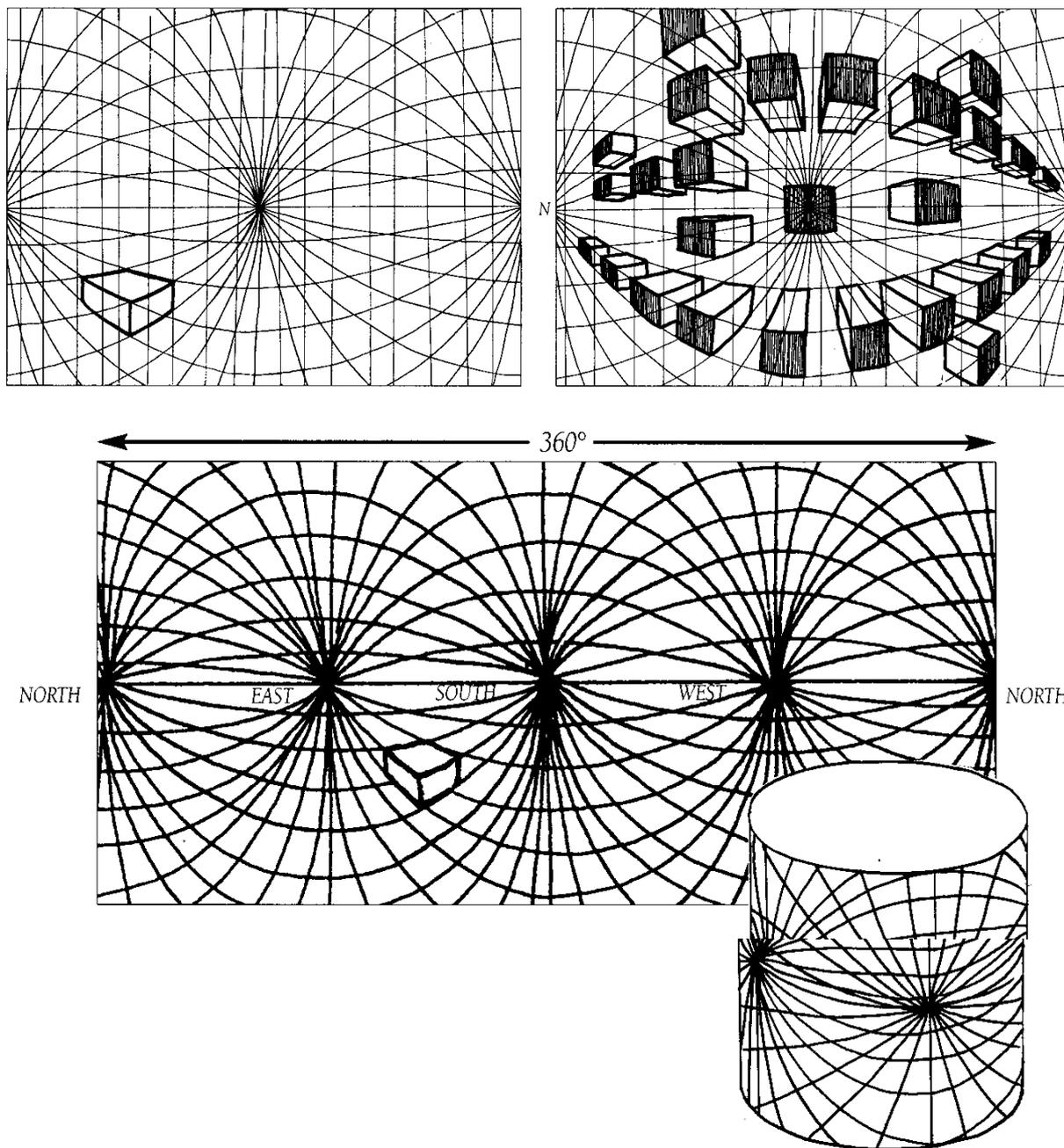


Figure 33

En introduisant les points de fuite situés aux quatre points cardinaux et le point de fuite principal associé au regard horizontal de l'observateur, on peut représenter sur une toile l'environnement d'un hémisphère, on peut relever le contenu de cette toile sur un vrai hémisphère, et finalement, en accouplant les deux hémisphères représentant chacune la moitié de l'espace entourant le peintre, dessiner sur une sphère la totalité du contenu visible de notre environnement spatial. Ces quelques dessins et images empruntés à Dick Termes illustrent ces principes :

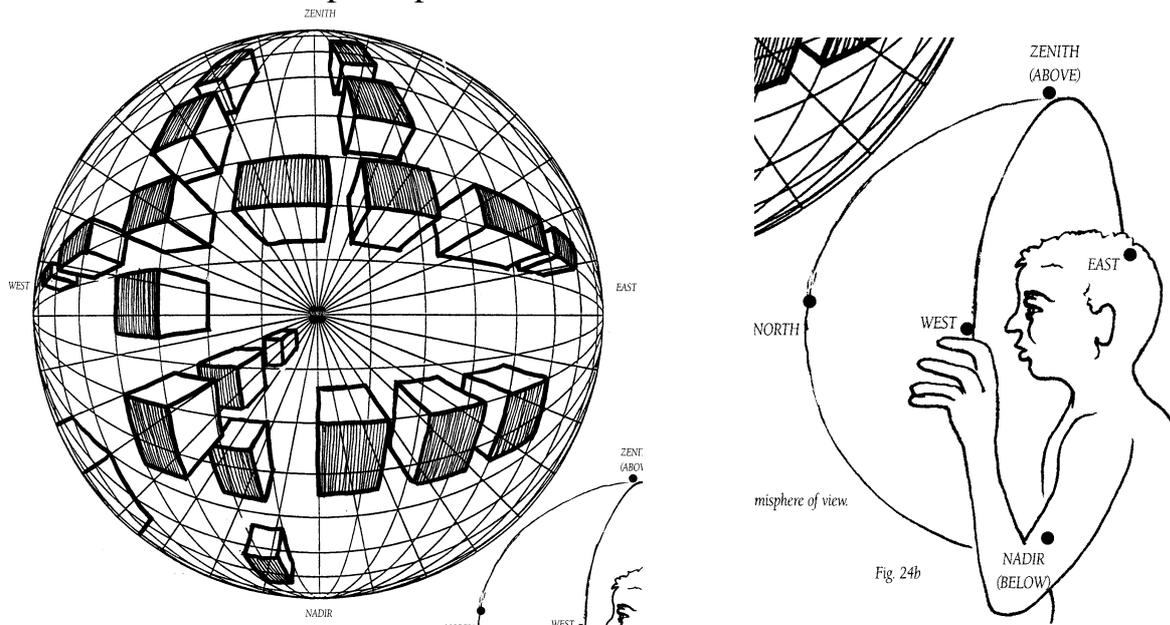


Figure 34



Panthéon



Sainte Chapelle

Image 13

5. Sur la conservation des mesures lorsque les surfaces présentent de la courbure

5.1 La problématique

La manière dont les peintres rendent compte de la conservation des proportions relatives des objets réels qu'ils représentent sur leur toile a été abordée dès la Renaissance. L'emploi du théorème de Thalès convient pour les projections parallèles de figures et objets plans sur des écrans plats. Mais comment représenter exactement des objets qui n'ont presque rien de plan ?

On peut au moins, dans un premier temps, supposer qu'ils ont une partie assez ronde pour être considérée comme sphérique. Se pose alors la représentation exacte, s'il se peut, de cette partie sphérique.

Lorsque la source de lumière est située sur une sphère, l'ombre de cette sphère sur un plan perpendiculaire à l'axe de la sphère passant par la source lumineuse a été bien étudiée depuis Ptolémée à des fins initiales de construction de cartes géographiques.

Cette projection de la sphère est qualifiée de stéréographique : elle possède la propriété générale de conserver les angles. Deux courbes quelconques qui se croisent sur la sphère selon un certain angle ont des projections qui se croisent dans le plan selon le même angle.

Il ne semble pas qu'on ait étudié en détail ce qu'il advient lorsque le plan n'est pas perpendiculaire à l'axe passant par la source lumineuse, ni lorsque cette source ne se trouve plus située sur la sphère elle-même. Dans les deux cas, les équations de l'ombre ne sont pas difficiles à établir, et la visualisation des résultats pourrait suggérer l'extension de théorèmes connus.

Quoiqu'il en soit, la conservation des distances n'étant pas en général respectée par ce type de projection, il semble, selon ce qui est rapporté dans [8], que Guillaume Postel ait suggéré le report sur la toile, à une mesure d'échelle près, des longueurs géodésiques des objets. Les travaux de Flocon et Barre, rapportés dans ce même article [8], semblent montrer que ce procédé apporte le moins de distorsion possible dans la perception de l'objet.

Cela dit, il faut à nouveau souligner le caractère théorique du procédé qui suppose les mesures préalables sur l'objet réel des longueurs de géodésiques qu'il faut d'abord reconnaître comme telles.

Il semble que, dans son travail de peintre et de décorateur, Dick Termes ne se soit pas embarrassé de considérations théoriques. Son œil de dessinateur l'a sans doute principalement guidé dans le choix des angles à partir desquels il construit ses quadrillages réguliers, et dans la taille des représentations qu'il dessine dans chaque maille.

On peut néanmoins se demander si ces représentations ne possèderaient pas également des invariants de proportions.

Faites l'expérience avec une membrane de caoutchouc : on peut localement passer continûment, insensiblement, d'une surface idéale de courbure 1 (la sphère) à une surface de courbure nulle (le plan), puis à une surface de courbure -1 (l'hyperboloïde à une nappe). On peut suivre alors l'évolution des propriétés d'un triangle à côtés géodésiques tracé sur la membrane. Bien des propriétés se conservent. D'où la possibilité de conservation de proportions par des déformations appropriées.

La question a été envisagée dans la publication [12] à propos justement de la représentation sur une sphère de la totalité de l'espace environnant le peintre. Une première réponse peut être apportée sous la forme suivante.

5.2 Le théorème de Thalès faible comme généralisation du théorème standard de Thalès

5.2.1 Sur le théorème standard en géométrie euclidienne

Revenons donc au théorème de Thalès qui fonde également la théorie de la perspective. Cet énoncé, qui relève de l'optique donc, traduit la relation métrique existante entre les ombres de deux objets parallèles éclairés par une source lumineuse. Cette relation métrique a deux aspects : elle concerne des longueurs d'une part, des angles d'autre part.

Dans ce cadre classique, on est ici en présence de ces trois acteurs : des objets parallèles, des droites en l'occurrence, d'autres droites qui leur sont transversales, la source lumineuse avec les propriétés de la lumière émise, encore sous forme rectiligne.

5.2.2 Les théorèmes de Thalès locaux en géométrie euclidienne

Vient alors aussitôt cette remarque : en géométrie euclidienne plane, on peut énoncer un premier théorème de *Thalès local* qui est le suivant (Figure 1, gauche) :

soient deux courbes a et b , deux points A et A' sur la première a , deux points B et B' sur la seconde b , de sorte que les droites AA' et BB' soient tangentes respectivement aux courbes a et b , et soit S l'intersection des droites AB et $A'B'$: alors $SA/SB = SA'/SB' = AA'/BB'$, les angles en A et B d'une part, en A' et B' d'autre part sont égaux.

On appellera *égalité à la source* l'égalité $SA/SB = SA'/SB'$, égalité des longueurs complète lorsque $SA/SB = SA'/SB' = AA'/BB'$.

Dans le cadre de cet énoncé, les conditions imposées sont suffisantes mais non point nécessaires pour que toutes les égalités aient lieu. Dans cette situation, la stabilité de vérité de l'énoncé est liée à l'absence d'écart entre les tangentes aux courbes aux différents points considérés.

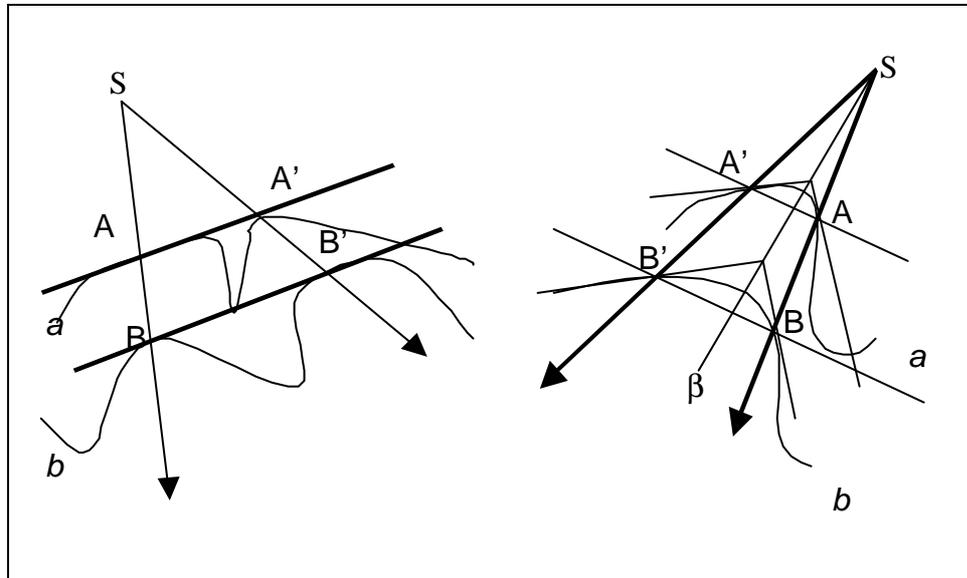


Figure 35

Il est un *second théorème local de Thalès* (figure 1, droite) : il suppose que les tangentes sont toutes distinctes, parallèles deux à deux (celle en A (resp.A') est parallèle à celle en B (resp B')), les points de concours des tangentes en A et A', B et B' sont alignés avec le point de concours de AB et A'B', et forment une droite β .

Un cas est particulièrement intéressant, celui où la droite β est bissectrice du couple de droites (SA, SA'), alors que les courbes *a* et *b* sont des cercles ou plus généralement des courbes admettant β pour axe de symétrie.

Les courbes sont des droites si l'une des propriétés locales se maintient lorsqu'on déplace les couples de points (A, B) : on obtient alors le théorème de Thalès classique qu'on appellera le théorème de Thalès *standard*.

5.2.3 Préliminaires à l'extension des théorèmes locaux à d'autres géométries

Si l'on songe à retrouver les théorèmes de Thalès dans les autres géométries, on se heurte a priori à ces deux difficultés : la notion de parallèle n'existe pas en géométrie sphérique, alors qu'au contraire, en géométrie hyperbolique, toute droite admet une infinité de parallèles. On va voir comment lever partiellement ces obstacles.

Par ailleurs, il convient d'adopter d'emblée un point de vue général : l'élément constitutif fondamental de ces géométries est la conique, qu'elle soit

cercle, ellipse, parabole, hyperbole, ou droite (plus précisément couple de droites). Compte tenu de la métrique, certaines, les géodésiques, sont extrémales qui réalisent le plus court chemin entre deux quelconques de leurs points.

On restera ici dans le cadre des variétés à courbure constante qui sont également les espaces modèles fondamentaux à partir desquels on construit les autres objets géométriques. Il s'agit donc de l'espace euclidien E^n , de la sphère S^n et de l'espace hyperbolique H^n , espaces très bien connus, tant sous l'angle topologique que métrique. D'une part, pour aller plus loin, on pourra contrôler l'évolution des métriques en commençant par introduire, dans les directions principales en chaque point, des dilatations elles-mêmes contrôlées. D'autre part, pour simplifier, étant donné qu'il n'y a aucune difficulté de principe à traiter le cas plus général, on s'en tiendra ici au cas où $n = 2$.

Les outils seront principalement ici, les diverses représentations planes de la sphère ou de l'espace hyperbolique, notamment par l'intermédiaire de la projection stéréographique qui a deux propriétés : elle conserve les angles, envoie conique sur conique. Rappelons également ici le théorème de Beltrami selon lequel une surface est à courbure constante si et seulement si existe en chaque point de la surface une application géodésique locale sur le plan.

Le théorème de Thalès concerne des rayons lumineux issus d'une source, et donc l'image dans le plan de géodésiques de l'espace physique. Il convient donc de respecter ce point de départ : quelque soit l'espace dans lequel on se place, on se donne un point source S situé à l'intersection de deux géodésiques.

5.2.4 Théorème de Thalès local en géométrie sphérique

Sur la sphère, les grands cercles sont les seules courbes géodésiques. Commençons par l'examen d'un cas particulier et simple où l'on est en présence d'une symétrie. Soient deux grands cercles passant par le pôle nord N (et donc par le pôle sud S), faisant entre eux l'angle α . On les coupe par des cercles situés à l'intersection de la sphère avec des plans orthogonaux à l'axe nord-sud : on détermine ainsi des triangles sphériques $(NA_iA'_i)_1$, isocèles : ils vérifient la propriété métrique angulaire du théorème de Thalès, mais seulement l'égalité des proportions de longueurs à la source (cf les formules données dans le tableau).

contenus dans des plans parallèles, ou si l'intersection des plans qui les contiennent est tangente à la sphère.

Dans ces conditions, par la propriété de conformité de la projection stéréographique, seules les propriétés angulaires du théorème de Thalès sont conservées sur la sphère.

En résumé, sur la sphère, le théorème de Thalès prend la forme suivante : *étant données deux géodésiques se coupant en N , deux triangles de sommet N définis par deux cercles parallèles vérifient le théorème de Thalès du point de vue angulaire. Si, de plus, les triangles sont isocèles, ils vérifient également l'égalité des proportions de longueurs à la source.*

5.2.5 Cas de la géométrie hyperbolique

Examinons maintenant le cas de la géométrie hyperbolique, de manière très succincte, car le mode de traitement de la question est exactement le même que celui qui a servi pour traiter le cas sphérique. On utilise alors ici le modèle de l'hyperboloïde à deux nappes et celui de sa projection stéréographique à partir du pôle sud sur le disque plan \mathbf{D}^2 contenu dans le plan horizontal passant par l'origine. Dans le cadre de ce modèle, les géodésiques sont des hyperboles situées à l'intersection de l'hyperboloïde et de plans passant par l'origine ; elles se projettent sur le disque en des arcs de cercles orthogonaux à son bord.

En conclusion, il existe bien, pour les trois géométries, une forme commune et générale du théorème de Thalès, caractérisée par la simple conservation des angles entre deux triangles parallèles dont deux côtés sont portés par des géodésiques. S'ajoute une propriété supplémentaire de conservation des rapports des longueurs à la source quand ces triangles sont isocèles. Dans le seul cas de la géométrie plane, apparaît l'égalité de proportion entre tous les côtés des triangles.

5.2.6 Un commentaire succinct sur ce qui précède

L'artiste qui dessine et peint sur une variété (munie d'une) métrique, le fait selon les propriétés optiques qui règnent sur cet objet : les parcours lumineux y suivent des géodésiques. Il est donc important pour lui de connaître le réseau de ces géodésiques sur de telles variétés, afin de pouvoir établir le jeu des ombres qui donnent l'éclairage et le relief des éléments du décor, afin de donner au moins l'illusion du respect des proportions.

De là découle la nécessité, pour le mathématicien, lors de l'examen d'une variété métrique et de sa représentation sur ordinateur, de faire apparaître au moins partiellement le réseau des géodésiques.

CHAPITRE III

BREF HISTORIQUE

Seront évoquées ici, seulement et succinctement, quelques-unes des grandes figures qui ont jalonné le développement de la perspective.

On trouvera sur http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/mefr_0223-4874_1911_num_31_1_7041 quelques données sur les prémices de la perspective.

On doit d'abord à l'architecte romain Vitruve (premier siècle av. J.-C.) l'écho d'une première théorie de la perspective : elle aurait été peut-être fondée par Agatharque, un peintre grec qui, à l'époque du tragédien, créa les décors de certaines pièces du théâtre d'Eschyle (526-456).

*« A son exemple [écrit Vitruve], Démocrite et Anaxagore écrivirent sur le sujet ; ils ont enseigné comment on pouvait, d'un point fixe donné pour centre, si bien imiter la disposition naturelle des lignes qui sortent des yeux en s'élargissant, qu'on parvenait à faire illusion et à représenter sur la scène de véritables édifices qui, peints sur une surface droite et unie, paraissent les uns, près, les autres éloignés. [traduction de l'historien des mathématiques Paul Van Eecke] ».*⁸

⁸ Ci-après le même passage dans la traduction du traité de Vitruve par Jean Martin: « *Architecture, ou Art de bien bastir* de Marc Vitruve Pollion ,... mis de latin en françois par Jan Martin,... pour le roy très chrestien Henry I », édité par J. Gazeau à Paris en 1547.

celte matiere plus fertile, & ma diction plus copieuse. Parquoy (Dire) en failant Pauoy de ces Autheurs, i'oze bien prendre la hardiesse de laisser sortir ces miens labours en lumiere, ainsi comme celluy qui a eu franc aller & franc venir en leurs possessions, ou ie me suis fourny des choses qui m'ont semblé conuenables a mon intention, & par ou i'ay eu les adresses pour ne fouruoyer en ceste Campagne, en laquelle i'ay fait cōme Agatharchus, lequel a la suasion d'Eschylus son precepteur, cōmencea deuiât tous en Athenes, a conuertir la Tragedie en Scene, laissant aux successeurs les moyens de faire comme luy : tellement que Democrite & Anaxagoras se trouuans stimulez de suyure ceste route, escriuirent en mesme stile la pratique de Perspective, donnant a entendre comment il fault par raison naturele, estant constitué vn centre, y faire correspondre toutes lignes procedantes du point de la veue, selon la portee de ses rayōs: & ce pour & afin que la platte paincture appliquee pour ornemēt aux Scenes, representast des apparences de bastimens releuez: & que certains traitz miz en superficies plaines, semblassent les vns approcher, & les autres se reculer.

Les traités d'Anaxagore (500-428) et de son brillant successeur Démocrite (460-370) sont aujourd'hui perdus. Mais sans aucun doute ont-ils contribué à maintenir un savoir-faire transmis de maîtres à élèves comme en témoigne cette image de la célèbre mosaïque provenant de la Maison du Faune à Pompéi, et représentant Alexandre et Darius à la bataille d'Issos (333 av. J.-C.) remportée par Alexandre.



Alexandre et Darius à la bataille d'Issos, Musée de Naples

Image 14

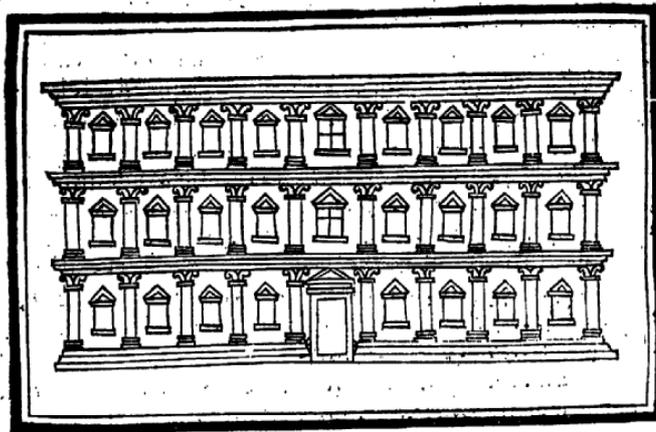
Cette page de Vitruve où apparaissent à nouveau , illustrés par la dernière figure, les termes de « Perspective » et de « Centre » [de perspective], confirme le savoir au moins technique des Anciens dans le domaine des arts plastiques :

DE VITR VVE.

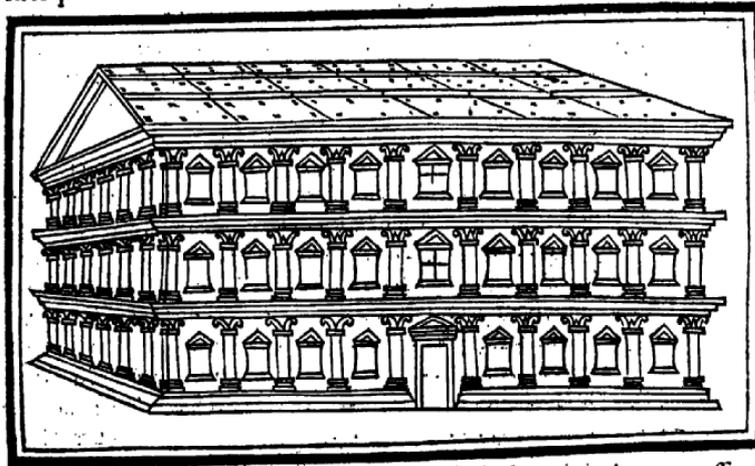
Quantité est vn effect cōuenant a la grandeur & largeur de tout le corps de l'œu-
re, & a toutes les particularitez des membres.

Disposition est vne bōne & raisonnable collocatiō d'iceulx mēbres, & vn moyé
qui donne grace a toute qualité d'ouurage. Les especes de ceste disposition, qui sont
dictes en Grec Idées, sont celles dont les noms ensuyuēt, Ichnographie, Orthogra-
phie, Scenographie.

Ichnographie donques est l'usage ou pratique de la regle & du compas, par la-
quelle on fait sur le plan ou terrasse les descriptiōs & lineamens des plattes formes.



Ortographie est la representation de la figure ou relief du bastiment, pour demō-
strer quel & comment il doit estre.



Puis Scenographie est l'adumbration ou renfondrement avec la racourcissure du
front & des costez d'vn Edifice, faite par lignes qui respondent toutes a vn Centre
& cela se nomme communement Perspective.

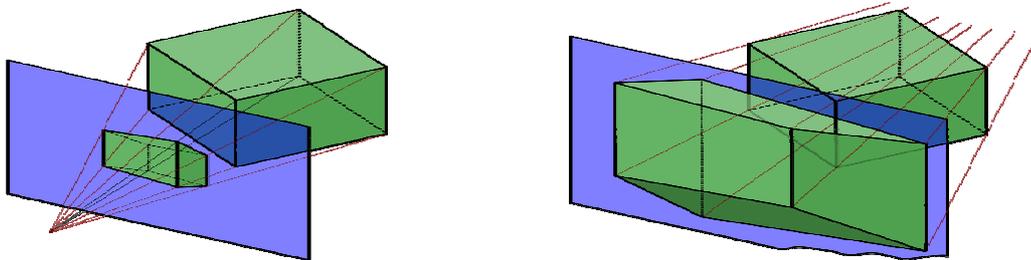
Toutes ces especes naissent de la vertu Imaginatiue, & de l'inuétion de l'homme.

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

On retrouve la trace de la méthode évoquée par Vitruve dans tous les
traités d'optique grecs, celui d'Euclide en particulier, et postérieurs, comme

celui du mathématicien et physicien irakien Alhazen (11^{ème} siècle), dont la traduction latine au 14^{ème} siècle eut une grande influence.

Si, pour donner de l'importance à ses personnages religieux, l'époque byzantine utilise un procédé de perspective « inverse »

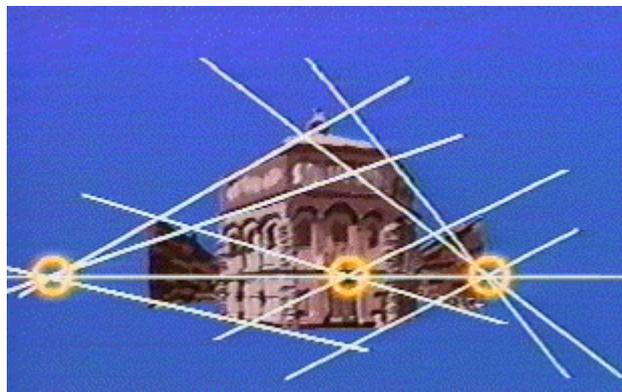


à gauche, perspective « directe », à droite perspective « inverse »
Extrait de http://en.wikipedia.org/wiki/File:Reverse_perspective.svg

Image 15

de celui qui sera développé plus tard, les artistes du Moyen Age ne s'attachent guère aux effets de perspective. Ils apparaissent toutefois vers la fin de cette époque. Les historiens de l'art font valoir l'œuvre d'Ambrogio Lorenzetti (Sienne, vers 1290 - Sienne, 9 juin 1348) qui maîtrisait la perspective dans ses paysages. On notera qu'il était aussi un cartographe réputé : l'art et la science mathématique marquaient sans doute leur retrouvaille.

Pas davantage que Lorenzetti, l'architecte et ingénieur florentin Filippo Brunelleschi (1377-1446) n'a pas laissé de traces écrites révélant ses procédés, c'était encore une époque où les savoirs se transmettaient verbalement. Pratiquant des expériences d'optique, créateur entre autres du dôme de la cathédrale de Florence et du Baptistère San Giovanni, on sait qu'il fit une petite peinture de ce dernier, et la présenta à une admiratrice de sorte qu'elle ne put guère faire de différence entre ce qu'elle voyait de cette peinture et du baptistère lui-même.



Le Baptistère de San Giovanni

Image 16

Bruneschelli eut comme élève Masaccio (1401-1428) qui produisit l'année de sa mort dans des conditions inconnues cette œuvre caractérisée par un point de fuite central :



Masaccio (1428)

Extrait de [http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_\(représentation\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_(repr%C3%A9sentation))

Image 17

On sait aussi que Brunelleschi travailla de conserve avec Leone Battista Alberti (1404-72), également homme accompli en toutes les disciplines, et qui publia en 1435, dédié à Filippo Brunelleschi, le premier traité sur la perspective *Della pittura*. On peut le lire sur :

http://it.wikisource.org/wiki/Della_pittura

Dans ce traité, Alberti n'envisage que le point de fuite central.

Piero della Francesca (ou encore Pietro Borghese) (1412 (ou 1420) - 1492) rédige dans les années 1470 son traité *De prospectiva Pingendi* : resté à l'état de manuscrit jusqu'en 1899, mais lu par plusieurs de ses contemporains, ce traité et l'enseignement de della Francesca eurent une très grande influence. L'auteur y développe et étend les constructions d'Alberti en les justifiant. Le point de fuite n'est plus nécessairement central, deux points de fuite sont

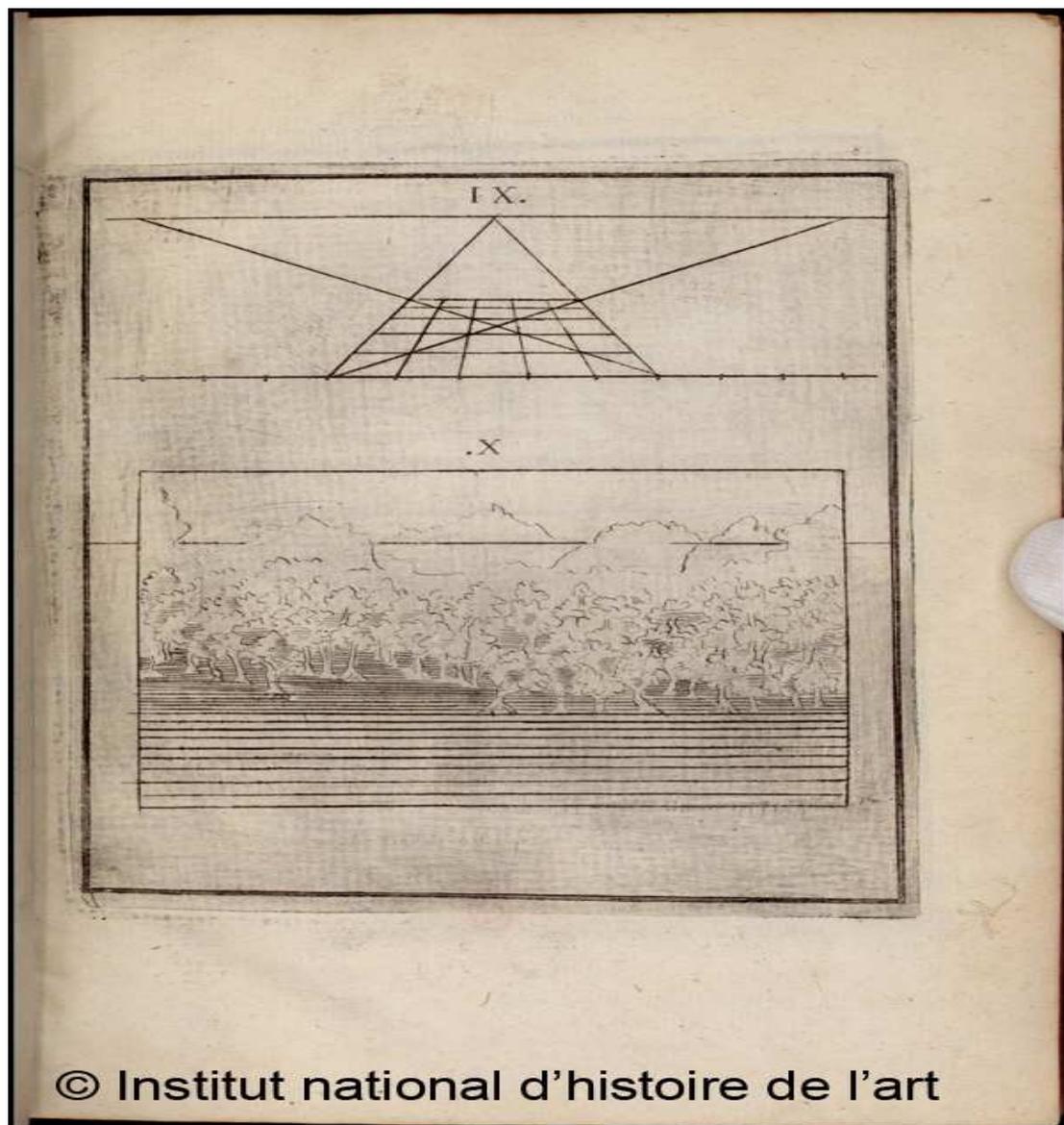
envisagés. Luca Pacioli, l'auteur de l'ouvrage de divers ouvrages mathématiques dont le célèbre *Divina Proportione* (1508), pendant un temps compagnon d'Alberti⁹, fut notamment élève de Piero, au moins à travers son ouvrage¹⁰.

Un tableau célèbre de Jacopo di Barbari (1440-1515) représente Luca, qui aurait pu rencontrer Albrecht Dürer (1471-1528). Mais on attribue plutôt à Jacopo le fait d'avoir initié à la théorie des proportions et à la perspective Dürer, lorsque celui-ci se rend pour la première fois en Italie en 1494. Son traité de 1525, repris dans le texte posthume de 1538 *De Symmetria... and Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit*, ne contient pas de démonstrations mathématiques, mais beaucoup de constructions nouvelles, dont certaines préfigurent celles que développera Monge dans sa théorie de la représentation des surfaces selon deux plans de projection.

Dürer a sans doute pu lire le traité de Jean Pelerin, dit le Viator (1445-1524), secrétaire de Louis XI et auteur en 1505 du traité *De Artificiali Perspectiva* qui introduisit pour la première fois, au début de son chapitre II, la notion de « point de distance » que l'on voit sur le fac-similé ci-dessous :
(cf <http://architectura.cesr.univ-tours.fr/Traite/Images/INHA-12R52Index.asp>)

⁹ « Je ne puis comprendre, mes très chers, écrit-il au chapitre VIII de son premier livre, que notre compatriote le florentin Leon Battista degli Alberti avec lequel, au temps du Pontife Paolo Barbo de Venise, je demurai de nombreux mois dans l'Alma Roma, habitant avec lui, dans son propre domicile, où il me traita toujours avec grande libéralité, et qui certainement a été un homme de très grande perspicacité et de très grand savoir en belles lettres et en rhétorique, comme en témoigne la profondeur de son dire dans son ouvrage De Architectura, ... »

¹⁰ Luca termine le chapitre XIX par cet éloge : « ... et ceci est illustré clairement, pour les sciences mathématiques, par celui qui fut en notre temps le souverain incontesté de la peinture et de l'architecture., Maître Piero della Francesca. Ce dernier oeuvra avec son pinceau aussi longtemps qu'il le put, peignant à fresque et sur bois, à l'huile et à la détrempe, comme nous pouvons le voir à Urbino, Bologne, Ferrare, Rimini, Ancona, et dans notre région, surtout dans la ville d'Arezzo, en la grande chapelle du maître autel [de l'Eglise Saint-François], œuvre qui est une des plus belles d'Italie et hautement louée par tous. Il composa aussi le livre de la perspective qui se trouve dans la très riche bibliothèque de notre Très Illustre Duc d'Urbino. Faites ne sorte de suivre son exemple. »



Le traité que Leonardo da Vinci (1452-1519) a consacré à la peinture est célèbre. Luca Pacioli en fait état en 1498. Une version de l'œuvre sera publiée à Paris, en 1651 seulement et pour la première fois. Une copie de ce traité se trouve dans la bibliothèque vaticane ; elle a servi à la préparation de la publication ci-après :

http://www.liberliber.it/biblioteca/l/leonardo/trattato_della_pittura/html/index.htm
ainsi qu'à celle faite en 1977 par l'éditeur français Jean de Bonnot [26].

Dans ce magnifique traité qui conserve toute sa valeur aujourd'hui, Leonard affirme la primauté des mathématiques. Ses toutes premières lignes sont consacrées à la présentation de la géométrie. Il y énonce notamment l'équivalence de la partie au tout en présence de l'infinité. Plus loin, au paragraphe 45, il énonce que « Le jeune [futur peintre] doit tout d'abord apprendre la perspective. » Il qualifiera cette perspective de « linéaire » au paragraphe 370, par référence aux considérations qui l'établissent et qui portent

sur les « lignes ». Supposant acquises les connaissances de la perspective, le traité ne donne pas de démonstrations comme le fera l'ouvrage qui va suivre et que Léonard a dû connaître, mais des directives pratiques touchant tous les aspects de la « science de la peinture » qu'il mettait au premier rang, mais après les mathématiques..

Le perspective au sens de Léonard ne se contente pas du seul dessin géométrique. Elle comprend aussi par exemple l'étude des ombres, une préoccupation que l'on retrouve dans le traité de Nicolas de Caus (1576-1626) sur *La perspective avec la raison des ombres et miroirs*, 1612.

Né en 1545, mort en 1607, Guidobaldo del Monte, ingénieur et mathématicien, et dont le traité *Mechanicorum Liber* eut une très grande influence, publia en 1600 *Perspectivae libri sex* : un ouvrage savant de 311 pages contenant de nombreuses démonstrations géométriques, précisant notamment les points de fuite secondaires associés aux divers faisceaux de rayons parallèles frappant le tableau. Il étudie également les ombres au flambeau d'une sphère sur un plan.

Pour avoir jeté les bases de ce qui sera appelé plus tard la géométrie projective, Girard Desargues (1591-1661), architecte et ingénieur, est parfois considéré comme le premier géomètre de son siècle. Le contenu du *Brouillon project d'une atteinte aux évènements des rencontres du cône avec un plan* (1639)

(cf <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k105071b/f1.image.pagination>),

où apparaissent par exemple les droites de l'infini et l'involution, tous éléments de l'étude moderne des coniques, et les énoncés de 1648 sur les triangles en perspective et la conservation du birapport, constituent des éléments essentiels de son apport aux mathématiques.

Desargues eut en particulier deux élèves : Blaise Pascal (1623-1662) dont le traité sur les coniques, prolongeant un bref *Essay pour les coniques* de 1640, est malheureusement perdu, et Abraham Bosse (1604-1676), graveur, qui se fit l'ardent défenseur des conceptions de Desargues, par exemple dans la *Manière universelle de M. des Argues pour pratiquer la perspective par petit-pied comme le géométral* (1648), où figurent les résultats de Desargues sur les triangles en perspective et sur la conservation du birapport.

La théorie mathématique de la perspective connut un renouvellement avec la publication en 1752 de l'*Essai sur la perspective* de Jean-Henri Lambert (1728-1777) qui deviendra membre de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin. Lambert introduit dans son essai la représentation

analytique des points et des segments conduisant aux formules utilisées aujourd'hui.

L'œuvre de Gaspard Monge (1746-1818) dans le domaine de la perspective mathématique va bien au-delà de celle de ses prédécesseurs. Il s'intéresse à la représentation d'objets quelconques dont la surface est parfaitement définie, et qui peuvent s'interpénétrer. Cette représentation est obtenue à partir de vues simultanées de dessus sur le plan du sol et de face sur le plan frontal. Des ensembles de sections par des plans parallèles au plan du sol et relevées sur le plan frontal permettent de préciser les particularités des surfaces et de leurs intersections. Pour les objets définis mathématiquement, il fait appel à toutes les données de l'algèbre et de l'analyse pour préciser leurs intersections et leurs projections. Enfin, il ne manque pas de s'intéresser aux ombres portées, engendrées par des faisceaux lumineux coniques ou cylindriques. On notera la simultanéité des dates de parution de la première édition de son traité de *Géométrie descriptive* d'une part, et de ses *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie* d'autre part : 1795.

Monge, professeur à l'Ecole Polytechnique, forma les nombreux géomètres de l'école française du début du 19^e siècle, comme par exemple Jean-Victor Poncelet qui introduisit formellement la géométrie projective dans son grand *Traité sur les Propriétés projectives des figures* (1822).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L.B. ALBERTI *De la Peinture, De Pictura*, Paris Macula Dédale, 1992, http://it.wikisource.org/wiki/Della_pittura
- [2] ANONYMES
[http://en.wikipedia.org/wiki/Perspective_\(graphical\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Perspective_(graphical))
[http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_\(repr%C3%A9sentation\)#Perspective_avant_la_Renaissance](http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_(repr%C3%A9sentation)#Perspective_avant_la_Renaissance)
http://fr.wikipedia.org/wiki/Guillaume_Postel
- [3] F. APÉRY *Models of the Real projective Plane*, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1987
- [4] V. ARNOLD *Singularities of caustics and wave-fronts*, Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [5] V. ARNOLD- S.M. GUSEIN-ZADE- A.N. VARCHENKO *Singularities of differentiable maps* Birkhäuser, Boston, 1985.
- [6] A. BEYS Reconstruction en 3D des plans caractéristiques de décors architecturaux peints dans les tableaux de la Renaissance, *Quadrature*, N° 79 (2011) 9-18.
- [6] D. BESSOT Salomon de Caus (c.1576-1626) ; archaïque ou précurseur ? *in Destin de l'art, desseins de la science, Actes du Colloque ADERHEM de Caen 1986*, pp 293-316.
- [7] A. BOSSE *Manière universelle de M. ses Argues pour pratiquer la perspective par petit-pied comme le géométral* (1648)
- [8] G. BOULIGAND, A. FLOCON, A. BARRE Étude comparée des différentes méthodes de perspective, une perspective curviligne, *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe de Sciences)* 7 Mars 1964 ; 5ème série tome L.
- [9] J.W. BRUCE-P.J. GIBLIN *Curves and singularities* Cambridge University Press, 1987.
- [10] C.P. BRUTER Morphologie des ensembles de bifurcation associés à des polynômes à une variable réelle. Applications *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 283 (1976) 651-654. ([Morphologie des ensembles de bifurcation associés à des polynômes à une variable réelle. Application,](#))

- [11] C.P. BRUTER [The Boy Surface as Architecture and Sculpture](#) Voir également les vidéos sur le site <http://christophe.delsart.free.fr/ARPAM/>
- [12] C.P. BRUTER *Quand le peintre s'approprie l'espace*, *Tangente*, Hors Série N°23 (2005) 24-27.
- [13] G. DESARGUES *Brouillon project d'une atteinte aux évènements des rencontres du cône avec un plan* (1639)
(cf <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k105071b/f1.image.pagination>),
- [14] A. DÜRER (trad. Jeanne Peiffer), *Géométrie* [« Underweysung der Messung »], [éditions du Seuil](#), 1995.
De Symmetria... and Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit, 1525-1538.
<http://www.rarebookroom.org/Control/duruwm/index.html>
- [15] F. DECOMITE <http://www.lifl.fr/~decomite/>
- [16] C. GUIPAUD Les six livres de Perspective de Guidobaldo de Monte *in Destin de l'art, desseins de la science*, Actes du Colloque ADERHEM de Caen 1986, pp 255-275.
- [17] V. ISOZ Géométrie projective
<http://www.sciences.ch/htmlfr/geometrie/geometrieprojective01.php>
- [18] J.-H. LAMBERT *Essai sur la perspective* Impr. MONOM, 93470 Coubron et Librairie A. Blanchard, Paris, 1980.
- [19] R. LAURENT Jean-Henri Lambert (1728-177) et la perspective à la fin du XVIII^e siècle *in Destin de l'art, desseins de la science*, Actes du Colloque ADERHEM de Caen 1986, pp 317-343
- [20] J.-P. LE GOFF Aux confins de l'art et de la science : le *De Prospectiva Pigendi* de Piero della Francesca *in Destin de l'art, desseins de la science*, Actes du Colloque ADERHEM de Caen 1986, pp 185-254
- [21] H.B. MEYER Perspective images <http://www.hbmeyer.de/perspect.htm>
- [22] J.PELERIN, *De Artificiali Perspectiva* 1^{ère} Edition, Toul, 1509.
<http://architectura.cesr.univ-tours.fr/Traite/Images/INHA-12R52Index.asp>
- [23] R. TATON *L'œuvre mathématique de G.Desargues*, Vrin, Paris, 1951-1981.

- [24] D. TERMES www.termespheres.com/
<http://termespheres.com/termesphere-that-show-how-perspective-works/>
- [25] A. TREIBERGS <http://www.math.utah.edu/~treiberg/Perspect/Perspect.htm>
- [26] L. DA VINCI *Le Traité de la Peinture*, J. de Bonnot, Paris, 1977.
http://www.liberliber.it/biblioteca/l/leonardo/trattato_della_pittura/html/index.htm
- [27] VITRUVÉ *Architecture ou Art de bien Bâtir*
http://homes.chass.utoronto.ca/~wulfric/vitruve/vit_titre.htm
- [28] I.M. YAGLOM *Geometric Transformations*, The Math. Assoc. of America, 1973.

Denise CHEMLA a bien voulu relire mon texte, je l'en remercie vivement.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

CHAPITRE I

PERSPECTIVE CLASSIQUE (LINEAIRE) ET GEOMETRIE DE TYPE EUCLIDIEN

3. Les données expérimentales qui fondent la perspective cylindrique

4. Perspective classique à un point et géométrie projective

2.1 Eléments de géométrie

2.2 Représentation de quelques droites significatives

2.3 Perspective d'un cercle

2.4 La notion d'espace projectif réel à deux dimensions ; un modèle de cet espace, le bonnet croisé.

2.5 L'invariant métrique de la géométrie projective plane et l'homographie

2.6 Eléments caractéristiques des formes et des ombres

2.7 Zones de forte brillance

2.8 Représentation des surfaces courbes. Contre-image d'un tableau

CHAPITRE II

EMPLOIS PRATIQUES DE LA PERSPECTIVE CLASSIQUE

1. Les principaux utilisateurs

5. Perspective à un point de fuite

6. Perspective à deux et trois points de fuite

7. Critique de la perspective rectiligne classique : la perspective curviligne, six points de fuite

8. Sur la conservation des mesures lorsque les surfaces présentent de la courbure

5.1 La problématique

5.2 Le théorème de Thalès faible comme généralisation du théorème standard de Thalès

5.2.1 Sur le théorème standard en géométrie euclidienne

5.2.2 Les théorèmes de Thalès locaux en géométrie euclidienne

5.2.3 Préliminaires à l'extension des théorèmes locaux à d'autres géométries

5.2.4 Théorème de Thalès local en géométrie sphérique

5.2.5 Cas de la géométrie hyperbolique

5.2.6 Un commentaire succinct sur ce qui précède

CHAPITRE III

BREF HISTORIQUE

BIBLIOGRAPHIE