SUGGESTIONS POUR UNE FAMILIARISATION ATTRACTIVE AVEC LES MATHÉMATIQUES D'AUJOURD'HUI

C.P.BRUTER
bruter@me.com
bruter@univ-paris12.fr

Divers textes à vocation pédagogique, mis récemment en ligne sur le site de l'ESMA, pourraient dérouter certains lecteurs. S'ils peuvent intéresser des publics beaucoup plus larges, ces textes s'adressent en premier lieu aux élèves du primaire et du secondaire. Le propos de cet article est d'en justifier la forme et les contenus qui, *in fine*, seront quelque peu détaillés. Rendus familiers aux enseignants, ceux-ci peuvent alors, à leur manière, diffuser ces contenus auprès de leurs différents élèves.

Données :

Il convient au préalable de rappeler brièvement les buts que cherche à atteindre l'enseignement et sur lesquels il y a sans doute consensus. On peut citer :

- la formation de l'esprit,
- la formation du jugement,
- l'apprentissage de savoirs,
- l'apprentissage de savoir-faire.

1) Formation de l'esprit, qu'entend-on par là ?

   Développer les diverses formes de sensibilité, la mémoire, la faculté d'observation, l'attention, la curiosité, l'imagination, l'aptitude à raisonner.

2) Formation du jugement, qu'entend-on par là ?

   Développer la capacité à émettre, en présence d'une information incomplète, une opinion, se révélant à long terme exacte, sur des états ou sur des processus.

A) La place des mathématiques dans la formation de l'esprit :

mémoire : l'apprentissage des tables de multiplication est l'un des tout premiers bons exercices de mémorisation, encore pratiqué par nécessité. L'école continue-t-elle à interroger les élèves, par oral ou mieux par écrit, sur les connaissances nouvelles introduites par les enseignants et que ces élèves sont censés acquérir ? Une bonne réponse est associée à une bonne mémorisation, une bonne compréhension éventuelle, une certaine attention.

faculté d'observation : elle n'est nullement encouragée par l'enseignement formel et axiomatique. Celui-ci impose de manière directe des notions quelque peu abstraites dont la contrepartie physique ou intellectuelle est ignorée. On recherche la présentation rapide et dense, mais elle n'est pas enrichissante, ni sur le plan de la compréhension, ni sur le plan de la connaissance du développent historique des mathématiques, ni sur le plan des rapports entre les mathématiques avec toutes les autre activités intellectuelles. Cette présentation au seul nom de l'efficacité mathématique est réductrice; si elle est très bien adaptée à une minorité d'entre les élèves, elle ne convient pas à la majorité d'entre eux. Il conviendrait donc de revoir ce mode introductif aux contenus mathématiques, il ne peut nuire en aucune façon aux plus aptes à accepter l'enseignement formel puisqu'il les enrichit sur d'autres plans.

L'attention : une présentation formelle qui ne s'accompagne pas d'une compréhension immédiate nécessite un effort d'attention au contenu de la présentation pour parvenir à mieux le comprendre et par suite le mémoriser. Cela suppose de la part de l'élève de bénéficier de conditions psychologiques innées ou induites, également environnementales, lui permettant d'accomplir cet effort. Lorsque cela n'est pas le cas, il revient à l'enseignant d'essayer de développer cette attention en s'appuyant sur l'observation renouvelée. On peut y parvenir en modifiant les conditions de l'observation, en renouvelant l'observation, en modifiant certaines propriétés des objets soumis à l'observation. Ce procédé possède le grand avantage d'élargir le champ de la connaissance, d'assouplir l'esprit qui a tendance à se rigidifier, à se créer des oeillères, par la contemplation d'un seul objet.

Curiosité, imagination : Il revient à l'enseignant d'attirer l'attention sur le caractère inattendu des faits mathématiques, leur degré de généralité, les questions que peut soulever, l'analyse des conditions qui permettent leur existence, diverses formes et directions de généralisation, leurs relations avec des faits physiques ou plus généraux. Par là, la curiosité de l'élève peut être stimulée. Il est très rare, semble-t-il, que l'enseignant aborde toutes ces questions, pris dans l'obligation temporelle et administrative, et par le souhait plus intime de dispenser la matière proprement mathématique. Mais cela pourrait être qui élargirait l'horizon de l'élève, ne serait-ce que sur le domaine des seules mathématiques.
Par ailleurs, faire apercevoir les nombreuses facettes attachées à une notion ou à un fait contribue à éveiller une certaine souplesse imaginative, pouvant inciter l'élève à construire d'autres édifices, à porter d'autres regards conduisant à des approfondissements, des extensions, des élargissements enrichissants.

L'aptitude à raisonner : il s'agit en fait d'une aptitude à fournir des explications, à trouver les causes qui se conjuguent, qui s'enchaînent, pour expliquer la présence d'un fait, d'un phénomène. L'exercice de déduction est largement pratiqué dans tous les enseignements mathématiques. La difficulté rencontrée par les élèves dans la pratique de la démonstration vient moins de leur capacité à déduire que de la difficulté qu'ils rencontrent à trouver les causes qui leur permettraient de faire les déductions. La bonne connaissance de la matière leur permettrait de mieux entrevoir au moins une partie de ces causes, sinon, dans les cas simples, leur totalité. De ce point de vue, l'exercice est avant tout un outil d'approfondissement de la connaissance de la matière enseignée.

B) La place des mathématiques dans la formation du jugement :

C'est la culture qui façonne le jugement. Par culture, il faut entendre la connaissance non superficielle de données, de faits, d'explications dans les différentes domaines où s'exerce l'activité de la pensée.

Il arrive maintenant souvent que d'excellents techniciens à l'intérieur d'une discipline, faute d'avoir pu consacrer un temps suffisant à pénétrer dans d'autres disciplines, fassent preuve d'un certain manque de culture. Bien sûr, leur succès à l'intérieur de leur discipline est en général le fait d'un grande culture au sein de cette même discipline. Mais ce n'est pas du côté des spécialistes qui se cantonnent dans ce rôle que l'on peut espérer un grand apport dans la formation du jugement.
Or les mathématiques, parce qu'elles sont au contact de tout ce qu'on peut représenter grâce à elles, permettent de dégager un certain nombre de concepts, voire de comportements, communs à toutes les champs d'investigation avec lesquels ces mathématiques sont associées. Ils ont plus ou moins valeur d'universalité, s'incarnent plus ou moins dans toutes les manifestations de la réalité. Ils constituent par conséquent un fonds réaliste sur lequel la manière de regarder le monde et le représenter présente a priori quelque pertinence. Ils contribuent de ce fait à fonder le jugement. Il importe alors que les mathématiciens s'entendent pour mettre en évidence ces notions, ces concepts, en montrer la pertinence, et les faire connaître.

Les contenus des enseignements, depuis les plus élémentaires jusqu'aux plus savants, forment un tout organique. Les insuffisances ou faiblesses qui se manifestent quelque part ont des incidences sur le reste de la chaîne. Par ailleurs, les contraintes physiologiques et psychologiques ajoutées à celles purement techniques, peuvent créer des obstacles locaux à l'emploi de toutes les ressources dont pourrait a priori disposer l'enseignant. Encore faut-il ajouter justement les possibilités que possède ce dernier compte tenu de la formation qu'il a reçue.

Constats:

Si l'on s'en tient aux enseignants du primaire actuel, on constate la très grande diversité de leur formation, celle en mathématiques faisant figure de parent pauvre. Pour les plus avancés dans cette discipline, leur connaissance des mathématiques est largement tributaire des contenus des enseignements reçus à l'université.

L’enseignement universitaire français des premières années fait la part belle à l’algèbre (algèbre linéaire, bases de la théorie des groupes) et à l’analyse jusqu’à la résolution d’équations aux dérivées partielles. La part de géométrie analytique et différentielle est bien plus faible. Pratiquement point de topologie différentielle. Ce sont là des tendances générales, évidemment, ici ou là, des corrections doivent être apportées à cette première et grossière esquisse.

Les contenus des enseignements secondaires et primaires visent en grande partie à préparer les élèves à affronter les enseignements universitaires. La part de la géométrie dans ces enseignements est d’une faiblesse relative. Le numérique y est présent, principalement au niveau basique dans l’enseignement primaire, dispensé, rappelons-le, par une majorité d’enseignants de formation peu ou pas du tout scientifique.

Mais ces contenus ont, à ces niveaux, davantage un rôle formateur, alors que l’enseignement universitaire actuel français tend à dispenser des savoirs et dans une moindre mesure des savoir-faire. Sa fonction culturelle est largement négligée.

Objectifs (souhaits) :

L’objectif premier est de parvenir à «réconcilier les publics avec les mathématiques».

L’objectif corollaire est de contribuer à atténuer quelques effets négatifs qui auraient pu être relevés dans les divers ordres d’enseignement.

Procédures proposées :

1) Présenter l’incarnation des mathématiques dans des réalisations matérielles spontanément attirantes par leur esthétique, et en profiter pour mettre au jour des éléments mathématiques directement accessibles situés à l’arrière-plan de ces oeuvres.

On fera donc des expositions de ces oeuvres, agrémentées de petits exposés les concernant, et adaptés aux différents publics de «visiteurs».

On pourra filmer une partie de ces présentations, et ainsi en faire bénéficier, mais à un degré moindre, un public moins restreint - il y a déperdition de transmission par le virtuel par rapport à la transmission physique directe.

2) Effacer l'effet inhibiteur de la contrainte scolaire en transposant le public dans un autre monde quelque peu irréel, plus ou moins enchanté. Le contenu des exposés oraux, ou d'écrits, pourra permettre d'opérer de tels déplacements.

3) L'exposé oral, par sa nouveauté, par le talent théâtral de l'orateur, peut marquer les esprits et laisser une trace durable dans la mémoire. Toutefois, son contenu tend à s'évaporer plus ou moins rapidement. Il est donc souhaitable que l'auditeur puisse l'écouter à nouveau s'il le souhaite, quelle qu'en soit la raison. D'où l'intérêt de la captation de l'exposé par le film.

4) La lecture présente une supériorité sur le film. Le déroulement de celui-ci est imposé. Certains passages du film, trop rapides, peuvent échapper à la compréhension du spectateur.

Au contraire, le rythme de la lecture s'établit spontanément en fonction du loisir du lecteur et de son degré de compréhension du texte. Le lecteur peut s'attarder sur un mot, chercher ailleurs un complément d'information sur le sens, la signification, se donner le temps d'assimiler ce qu'il vient de lire. La lecture peut agir avec beaucoup plus de profondeur que la vue rapide d'un défilé d'images, elle oblige à comprendre ce que le regard suit.

On pourra donc également songer à la création de petits contes qui, par nature, transplantent le lecteur dans un monde apaisé, délassant mais stimulant, et apportent, par leur brièveté, un lot modeste mais réfléchi de connaissances. Ils n'écrasent donc pas ainsi le lecteur sous le poids des évènements. Le conte reste là, à portée de main, on peut y revenir, on peut gloser et commenter, seul dans son coin tranquille, ou dans un échange joyeux à plusieurs, revenir à la réalité, et aller plus avant.

Comme il semble par ailleurs que la lecture formatrice perde du terrain devant la contemplation béate de l'écran, il conviendra sans doute de lire en classe de tels textes.

Mise en oeuvre :

1) Définition globale des contenus :

Ils tiennent compte des observations rassemblées dans les paragraphes «données» et «constats».

Il s'agit en premier lieu d'apporter la connaissance de notions de base, si possible les plus importantes, présentes de manière implicite ou explicite dans tous les domaines des mathématiques, ce qui assure leur modernité et leur actualité, et qui, petit à petit, au rythme qu'il convient, seront amenées à être davantage explicitées, utilisées et développées, notamment sur un plan technique, au fur et à mesure de l'avancée dans les cursus. Leurs liens avec les données et évènements du monde physique - qui sont en définitive la source véritable souvent inconsciente de ces notions mathématiques - mérite d'être mis en évidence, autant que faire se peut. Il est bien évident que les généralisations éventuelles trop abstraites sont exclues.

Concepts universels soulignés par les mathématiques présents dans tous les domaines de la pensée et de l'action : mouvement, stabilité, singularité.
notions associées : trajectoire, translation, rotation, déformation, aléa, symétrie, groupe (au sens mathématique), bifurcation, déploiement, éclatement.

Outil universel : représentation
notions associées : nombre, ombre, image, projection, application, représentation.

Formes fondamentales topologiques et géométriques (associées aux état figées ou en devenir des objets) : courbe sans fin (ouvertes, droites) et fermées (noeuds, cercles), déploiement des noeuds [noeuds avec singularités (formes polygonales), boules et sphères, boules et sphères avec singularités (formes polyèdriques), tores creux et pleins].
notions associées : dimension, vecteurs et champs de vecteurs, fibres et espaces fibrés (cônes), feuilletages.

2) Le détail de ces contenus:

Il s'agit en second lieu d'apporter la connaissance de quelques faits importants liés aux concepts, notions et objets précédents. Voici quelques suggestions attachées aux différents thèmes qui apparaissent dans les lignes précédentes. On peut naturellement en proposer d'autres.

Il faut au préalable insister sur le fait que les exposés ne s'adressent pas à des mathématiciens spécialistes, ou ne sont ou ne seront pas faits par des mathématiciens, chevronnés ou non, bien au contraire s'il s'agit d'enseignants dans le primaire. Sauf en des cas très particuliers, faire preuve de la rigueur pure et dure du mathématicien est exclu. Le but de la présentation des énoncés est d'en faire comprendre le sens, la signification, la portée. Ces énoncés se situent dans un cadre historique dont la connaissance n'est pas inutile.

Les textes libellés http://www.math-art .... se rapportent aux notions localement présentes. Ces textes sont ici principalement cités pour les images illustrant ces notions. Ce ne sont que des exemples de discours écrits ou oraux qui ont pu être tenus pour ou devant des élèves. Par ailleurs ils peuvent être utiles pour mettre sur pied une formation cohérente d'enseignants qui souhaiteraient faire des exposés d'initiation aux mathématiques récentes en s'appuyant sur les réalisations artistiques. Autres lectures utiles dans cette optique :

http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Catalogue_2013.pdf

http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/ConferenceSaverne.pdf

http://www.math-art.eu/Exhibitions/expoIHP2010/pdfs/Catalogueexpo.pdf

Mouvement, translation, rotation, ... :

Simple énoncé du théorème d'Aristote-Liouville selon lequel tout mouvement local est le composé de translations et de rotations (translations angulaires). Composition de ces deux derniers mouvements, énoncé de la structure de leur ensemble.

Exemples de trajectoires : ellipses et paraboles (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/glissades_Fevrier(bis).pdf), épicycloïde et noeud de trèfle (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/bonneAnnee/BA1.pdf)

(*Un peu partout dans le monde, de nombreux enseignants font faire à leurs élèves des pavages en leurs proposant des recettes. L'accompagnement mathématique, pourtant fort simple, est pratiquement absent, ce qui est à la fois étonnant et dommage. Les lignes qui suivent visent à combler cette insuffisance*).

Le groupe singulier primordial (échange de deux pions, rotation de pi, symétrie élémentaire ou réflexion par rapport un miroir). Les symétries planes classiques comme éléments de groupes de réflexion (translation, rotation, symétrie glissante) . N'importe quel quadrilatère donné est le motif permettant un pavage du plan (avec démonstration). Conditions angulaires pour un pavage du plan par des polygones réguliers (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/patisserie/PM3.pdf). Simple énoncé de l'existence de 7 familles de frises, de 17 familles de pavages du plan. Un exemple de non commutativité de rotations dans l'espace.

Description du disque hyperbolique (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/patisserie/PM3.pdf). Exemples de pavages du disque : on peut le paver par des polygones réguliers quelconques (cf http://www.math-art.eu/Exhibitions/expoIHP2010/pdfs/Catalogueexpo.pdf).

Déploiement du groupe singulier primordial. Deux exemples de groupe cyclique (C12, la montre, et C10 encore noté par Z10), exemple de sous-groupe de C4, le groupe dihédral du triangle, du carré. Z comme déploiement infini du groupe singulier. Pavage de Z par Z10, Z est le revêtement de Z10 (notion de revêtement). Description de la projection du groupe Z sur Z10 à travers la description de l'ensemble des éléments de Z qui se projettent sur un élément donné k de Z10; : on l'appellera la fibre de Z en k, Z est considéré un ensemble fibré de base Z10. k est l'ombre, l'image de cette fibre projetée. (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Kangourou.pdf)

Représentation :

Le nombre et les chiffres comme représentations du mouvement (de translation, de rotation (angle), d'une translation suivie d'un rotation (nombre du Chuquet-Cardan encore appelé complexe par Gauss)). Les différents types de nombres (entier, rationnel, irrationnel, transcendant). Un rationnel est représenté par une suite finie de chiffres (avec démonstration). Justification du procédé employé pour faire la somme de deux rationnels. Exemple d'irrationnels (démonstration de l'irrationnalité de racine de 2, éventuellement de racine de 3) cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/pythagore.pdf).

L'ombre ou image en tant que représentation : ombre d'une segment vertical éclairé par un «soleil», une source lumineuse située à l'infini aux rayons verticaux, puis inclinés. L'ombre, l'image, la représentation ne doit pas être confondue avec l'objet. Comparaison des ombres de deux segments verticaux : énoncé de l'observation physique dénommée «théorème» de Thalès, versions statique et dynamique cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/patisserie/PM1.pdf.

Ombre ou projection d'une sphère ordinaire sur un plan, éclairés par une source lumineuse située à l'infini dans l'axe nord-sud, puis à distance finie du pôle nord (démonstration). Cas où la source lumineuse est au pôle nord (projection stéréographique) : l'ombre ou image d'un cercle parallèle à l'équateur est un cercle (démonstration). L'image d'un cercle quelconque ne passant pas par le pôle nord est un cercle (énoncé sans démonstration). (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/patisserie/PM1.pdf). Enoncé sans démonstration que cette projection est une application conforme (conserve les angles entre deux courbes tracées sur la surface).

Autre exemple de projection stéréographique, celle de l'hyperboloïde à deux nappes : création du disque de Beltrami-Poincaré (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/patisserie/PM3.pdf).

Le nombre d'éléments d'un figure qui se projettent sur le même point de l'ombre est ici appelé le poids de la projection. Il est presque partout constant sur des plages convenables de la figure (énoncé sans démonstration)(cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/bonneAnnee/BA1.pdf)

Formes fondamentales :

Le point comme forme singulière fondamentale. Enoncé de la rareté des points singuliers (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/bonneAnnee/BA1.pdf). Déploiement en noeud trivial, i.e. une courbe (notion de dimension d'une courbe) fermée. Déformations élémentaires d'un noeud (ellipse, formes polygonales), exemples de noeuds non triviaux (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/

bonneAnnee/BA23.pdf), en particulier le noeud de trèfle, noeud torique (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/bonneAnnee/BA1.pdf).

Point singulier sur une courbe. Eclatement d'un noeud en un point singulier, courbe ouverte. Noeuds triviaux avec singularités (formes polygonales).

Théorème de Pythagore (démontrer cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/pythagore.pdf). Equations du cercle en coordonnées cartésiennes et «polaires».

Différence entre géométrie et topologie (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/bonneAnnee/BA23.pdf). Dimension (topologique) d'un espace, d'une forme.

Rotation d'une noeud autour d'un axe, en particulier d'un cercle autour d'un diamètre : la 2-sphère géométrique, ses équations. Exemples de déformation de la 2-sphère topologique (ellispsoïde, formes polyédriques, les 5 polyèdres platoniciens). Comptage des faces d'un n-cube (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/bonneAnnee/BA1.pdf). La n-sphère en tant que bord d'une n-sphère pleine ou boule.

Le point et le noeud en tant que tores topologiques de dimension respective 0 et 1. Eclatement d'un point d'un noeud en un autre noeud, simultané de tous les points d'un noeud : tore creux. Exemples de tore géométrique de dimension 2 (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/bonneAnnee/BA1.pdf, http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/patisserie/PM4.pdf). Représentation angulaire d'un tore.

Le tore creux en tant que forme (ou «espace») fibrée, de base le noeud premier, de fibre en un point, le noeud résultant de l'éclatement de ce point. Autres formes fibrées : les cônes (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/glissades_Fevrier(bis).pdf), les rubans : exemples du ruban cylindrique, du ruban de Möbius. Son bord est un noeud de trèfle. Notion d'orientation (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/bonneAnnee/BA23.pdf**).**

Notion et exemples de feuilletages (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/patisserie/PM1.pdf), fibrations en tant que feuilletages. Enoncé du «pâtissier» sans démonstration. Notion de plaques, vecteurs, champs de vecteurs, transformation du boulanger (cf http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/patisserie/PM2.pdf).