

LETTRE À ARMAND BOREL

Cher Maître,

J'ignore bien sûr, recevant cette lettre Outre-tombe, quelles seront vos réactions. Peut-être, quelques uns de nos subtils collègues, actuels ou futurs, en auront-ils la teneur ? Il est agréable d'en rêver. Et peut-être profitez-vous de la présence d'Henri Cartan pour échanger vos réflexions sur les rapports entre les mathématiques et les arts. « Dans le discours que j'ai prononcé le premier février 1977 à l'occasion de la réception de la Médaille d'Or du CNRS, j'ai tenté [dit Henri Cartan] de défendre la thèse selon laquelle les mathématiques relèveraient plutôt de l'art que de la philosophie. » Partageriez-vous ce jugement ?

L'exposé que vous avez fait en 1981 puis en 1982, repris aujourd'hui dans les Newsletter de the European Mathematical Society sous le titre « Mathematics: Art and Science » [1], contient en germe avancé les principaux éléments de ce courrier.

Les mathématiciens, vous l'observez, adorent en général procéder à des généralisations. Vous exprimez cette idée sous une forme quelque peu plus restreinte: « A mathematician often aims for general solutions », précisant ensuite: « we strive for general theorems, principles, proofs, and methods ». On peut et doit s'interroger sur les causes qui conduisent à cette attitude d'esprit, à ce comportement, sur les circonstances dans lesquelles il prend racine et se développe.

Je voudrais seulement ici, à travers le rappel de cette anecdote bien connue, souligner combien est répandue dans l'esprit des humains cette attitude d'esprit: un Anglais, appelons-le Monsieur Brexit, débarqua à Calais, vit une femme rousse, et envoya aussitôt une missive à ses amis insulaires, un SMS, énonçant que toutes les françaises étaient rousses. Il faut mettre au crédit des mathématiciens leur prudence, leur sagesse: ils énoncent des conjectures et non point des affirmations générales s'ils ne peuvent prouver la validité de leurs énoncés. Contrairement à vous, Maître, Monsieur Brexit n'utilise même pas le mot « often ».

L'esprit humain aurait donc tendance, de manière spontanée, naturelle, à procéder à des généralisations. Mais il arrive fréquemment que de telles généralisations soient mises en défaut en présence de ce qui apparaît de prime abord comme un cas particulier: n étant un entier positif, je sais toujours résoudre l'équation $x - n = 0$, mais quid de l'équation $2x - n = 0$, mais quid, etc...: nous sommes amenés à entreprendre des analyses plus poussées des processus intellectuels mis en œuvre pour résoudre de telles équations, à introduire des vues, des notions, des procédés de plus en plus généraux qui permettent de mieux comprendre et de mieux développer les propriétés des objets déjà rencontrés.

« Ce qu'on appelle en effet la mathématique est une sorte de miroir de la Nature elle-même, une sorte d'être biologique en plein développement par

l'intermédiaire de notre biologie mentale, qui se présente d'abord sous la forme d'une construction à étages de représentations. Au bas de l'édifice se placent, dans un langage descriptif particulier, les représentations simplifiées des objets et des mouvements du monde physique. C'est la raison pour laquelle on peut considérer la mathématique comme une physique abstraite. Aux étages successifs se situent des représentations plus synthétiques des contenus des étages inférieurs. En mathématiques, davantage la représentation est abstraite, plus elle gagne en pouvoir de généralité et de pénétration. » (lignes empruntées à [2]) .

Je viens d'employer le terme « *représentation* ». Ce terme n'apparaît pas dans votre texte, Maître, mais vous vous approchez de son introduction lorsque vous écrivez « Mathematics was, from the very beginning, of course, a kind of idealisation... ». L'activité de représentation est une l'une des activités fondamentales des objets car elle contribue à assurer leur stabilité à travers l'espace et à travers le temps.

Vous, objet, devez vous prémunir de tout ce qui peut nuire à cette stabilité, acquérir les éléments nécessaires au maintien et à l'accroissement de cette stabilité: l'activité de représentation de toutes les données environnementales est naturellement l'activité première indispensable pour parvenir à cette fin de stabilité. Pour nous en tenir au seul règne biologique qu'il soit animal ou végétal, il n'est pas un seul objet de ce règne qui ne pratique cette activité de représentation. Elle apparaît dans le langage mathématique à travers des termes comme par exemple « représentation » justement, « fonction », « application », « foncteur ».

La représentation s'effectue sur le mur d'une caverne, sur un écran, qu'il s'agisse de la feuille de papier, de la toile du peintre, de la cire nerveuse intérieure à notre cerveau. Sauf dans le cas mathématique des représentations dites « fidèles », et encore, la représentation n'est pas en général équivalente à l'objet source dans son intégralité, mais en est une forme d'analogue, dotée de quelques-unes de ses principales propriétés. Ce qui apparaît sur l'écran est une sorte de dessin de l'objet source. Très stylisé, ce dessin, comme par exemple le 1¹ qui représente la présence observée d'un objet dans notre environnement, porte le nom générique de symbole. En étendant quelque peu la signification de ce terme, on peut dire que l'activité première de l'esprit est la fabrication de symboles.

L'une des erreurs que commet parfois l'esprit est de prendre ces symboles, ces représentations pour la réalité elle-même. Il est plus d'une fois arrivé que de telles erreurs soient commises débouchant sur des prévisions fausses, sur des accidents, sur des situations mortifères, plus ou moins violemment destructrices. On prend souvent

¹ Ce dessin représente l'objet générique le plus significatif pour nous, qu'il soit protecteur comme, debout, l'être humain lui-même, l'arbre sous lequel on s'abrite, ou au contraire hostile et violent comme à nouveau l'être humain, ou ce qui tombe du ciel dont on perçoit la trajectoire locale quasi verticale.

la représentation, le modèle pour la réalité. On en fait parfois une idole. C'est ainsi qu'on aboutit au mythe platonicien. Dans l'esprit de certains, le mythe devient réalité. Il se perpétue par défaut d'esprit critique ou par une forme de complaisance, ou pour le plaisir réconfortant d'appartenir à une secte où fleurit un ésotérisme agréable, poétique et chaleureux.

Il est dans la nature des phénomènes physiques particulièrement stables, dont les effets présentent ces mêmes propriétés de stabilité. Ce sont en particulier et historiquement d'abord les phénomènes lumineux, ceux liés à l'électromagnétisme. On leur doit la géométrie première, la droite comme représentation du rayon lumineux, la visibilité et l'observation des formes et de leurs ombres sur le sol, qui en sont des représentations naturelles, l'observation de la conservation (stabilité) de certains rapports métriques que l'on rencontre dans les projections parallèles, coniques, et stéréographiques. Les énoncés et démonstrations géométriques premiers peuvent se transcrire en termes physiques, ils ne sont présents que comme conséquences de la stabilité des phénomènes physiques primordiaux.

Le principe d'invariance galiléen, l'invariance est la forme extrême de stabilité, l'invariabilité locale de la pesanteur et de ses effets, correctement représentés, traduits dans notre langage symbolique approprié, ajoutés à l'analyse des manières dont ces effets se manifestent et se déroulent, débouchent de manière naturelle sur des prévisions assurées d'évolutions diverses. La causalité physique est entièrement traduite dans ces représentations sous la forme d'implications dites logiques. X est vraie parce que A et B ont impliqué C qui, avec D , implique X .

Cette causalité et stabilité physique sont présentes également dans certaines démonstrations qui exploitent le jeu de la lumière, sous la forme des réflexions sur des miroirs. Que les éléments des groupes de déplacements standard puissent s'analyser comme conséquences de telles réflexions est révélateur de la profondeur physique du phénomène lumineux. Notons que l'exploitation des phénomènes de réfraction à des fins de démonstration ne semble nullement avoir été entreprise.

La réflexion miroir s'accompagne d'une symétrie. Puisque stabilité équivaut à équilibre des forces, un état est stable lorsque les forces sont d'égale intensité et disposées de façon symétrique. L'égalité physique absolue est sans doute un leurre, une conception de mathématicien et d'idéologue. Et sans doute serait-il plus pertinent de parler de quasi égalité, d'autant plus que des effets physiques peut-être secondaires et peu accessibles pourraient contribuer à asseoir des équilibres globaux. Quoiqu'il en soit, la notion de symétrie en physique et son importance, développée dans le milieu scientifique notamment par Pierre Curie, a eu des effets positifs sur le devenir des mathématiques, notamment à partir du moment où l'on a pris conscience que cette notion physique jouait un rôle central dans la signification pratique de la notion de groupe. Ce n'était pas encore le cas du temps de la jeunesse de Félix Klein qui

utilisait le terme d'inverse et non celui de symétrique. Dans cette optique, la conjecture physique que Gell'man avait énoncée comme il est dit dans la note 7 de votre article, était parfaitement justifiée.

Les mathématiques, dans la mesure où elles sont des *représentations pertinentes*, où *l'agencement et le développement des causes physiques sont correctement traduits à travers la succession des différentes étapes des raisonnements*, acquièrent alors une tout à fait «reasonable effectiveness». On ne peut d'ailleurs qu'admirer le caractère synthétique et la pertinence des formules employées au cours de nombreux calculs, en physique théorique et en mathématiques appliquées notamment, dont il est fort rare que soit explicitée ou même comprise la signification physique.

Votre article évoque des rapports entre les mathématiques et les arts, relate le sentiment de beauté que ressentent nombre de mathématiciens à l'égard de leur discipline. Pardonnez-moi d'éprouver un autre sentiment, celui d'une insatisfaction à l'égard de tous ceux qui, comme Gauss, Eisenstein ou Kronecker que vous citez, ont simplement employé ces mots, art et beauté, sans que soit vraiment explicité pourquoi la mathématique serait un art, et qu'est-ce que la beauté dans cette discipline, ou ailleurs. Vous vantez la précision du langage mathématique, sa capacité à définir les concepts qu'emploient les professionnels. Ne conviendrait-il pas d'essayer de donner également des définitions assez claires de ce que sont l'art, la beauté: elles pourraient peut-être permettre d'engager des débats pouvant conduire à une meilleure compréhension des phénomènes ?

Convenons d'appeler art, une activité d'excellence dans un domaine particulier. Ne parle-t-on pas en effet de l'art musical, de l'art pictural, de l'art architectural, mais aussi de l'art de la médecine, de l'art de la diplomatie ou au contraire de l'art de la guerre, et de façon plus réjouissante et plus conviviale de l'art de la table et celui de la pâtisserie ?

Qu'est-ce alors un artiste ? Dans le sens le plus général, toute personne qui pratique un art, une activité de manière excellente et exemplaire. Il peut être soudeur, mathématicien ou sculpteur: il ne se sera donc pas fait de distinction a priori entre le mathématicien, le danseur, l'architecte et le pâtissier, en tant qu'artistes.

On reconnaît leur qualité d'artiste par six des propriétés de leurs œuvres: *représentation, souci de perfection et de finition, inventivité et fécondité, universalité, singularité, rôle des phénomènes ondulatoires*. La publication [2] explicite quelque peu chacun de ces points à l'aide d'exemples d'œuvres empruntées à l'art visuel, puisant leur contenu dans l'univers infini des objets mathématiques.

Le terme « Création » ne figure pas dans cette liste. Ce terme est utilisé en deux sens: celui de nouveauté, d'un objet (matériel ou intellectuel) dont la présence n'était pas auparavant apparente dans l'environnement spatio-temporel de son auteur, et celui du processus qui conduit à la naissance de cette nouveauté. Toute création est-elle artistique ?

Avant de revenir sur ce thème de la création, une remarque: aucun des arts n'est figé dans son contenu, dans le temps. Prenons l'art du transport de l'être humain: la «Nature» a développé en nous divers procédés de transport, comme celui du développement de nos membres, de la mécanique musculaire, de la mise en œuvre simultanée des éléments précédents pour favoriser le mouvement local, dont on sait par le théorème d'Aristote-Liouville qu'il se compose de translations et de rotations locales. La même Nature a concentré ensuite en notre appareil mental la part essentielle de notre capacité à développer l'art du transport. Ce fut la maîtrise de l'animal (cheval, bœuf), l'« invention » de la roue, etc, jusqu'à celle de la fusée et de la voiture aérienne aujourd'hui. On pourrait tout aussi bien prendre comme exemple celui de l'art agricole qui va de la cueillette jusqu'à la fabrication de nouvelles semences transgéniques. Toutes ces « créations » sont-elles moins complexes que celles des mathématiques à laquelle vous faites allusion, Maître, en fin de votre exposé ? Devrait-on également en conclure, comme le font certains mathématiciens à propos des mathématiques, (« This feeling - that mathematics somehow, somewhere, pre-exists - is widespread »), que préexistaient le carrosse, la diligence et la voiture de course, en somme le monde serait-il entièrement prédéterminé ? N'est-il pas plutôt raisonnable de s'affranchir du mythe, et de reconnaître que le corpus de mathématiques dont nous disposons aujourd'hui est une expression des efforts de l'être humain pour représenter et comprendre le monde qui l'enveloppe, mais non point le résultat de la découverte par des sortes de géologues de l'intemporel de strates encore cachées qui peuplèrent un univers d'idéalités ?

Je plaide donc pour une universalité de fonctionnement de la machine cérébrale humaine, quel que soit le domaine d'activité considéré. Naturellement, chaque activité a ses propres spécificités où les moyens et techniques employés ont leur part qui n'est pas négligeable. La maîtrise dont fait preuve l'artiste dans l'emploi de ces moyens et techniques contribue évidemment à la qualité de ses œuvres et à son renom en tant qu'artiste. Mais il reste à comprendre les mécanismes mentaux qui débouchent sur la fabrication d'œuvres nouvelles par leur contenu. Ils s'apparentent peut-être à ceux d'une embryologie qui serait constante, où se mêlent des inducteurs acquis (génomés, mécanismes routiniers de comparaison conduisant notamment à l'établissement de ce qu'on nomme des analogies, savoirs assimilés de faits et de procédures), et des inducteurs environnementaux (correspondants à des données et contraintes locales qui pouvaient ne pas figurer dans le passé). Ces prémisses pèsent

sur l'activité incessante de constructions d'édifices neuronaux dynamiques, constructions stimulées par la présence plus ou moins ressentie des effets déstabilisants ou au contraire stabilisants des différentes contraintes et données environnementales, et dont la stabilité interne est éprouvée par les manières dont ils réagissent aux fluctuations de ces données environnementales.

La création est une réponse apportée à des effets déstabilisants que présentent ces environnements extérieurs et intérieurs. Exemples de tels effets: pour celui penché sur les problèmes de transport, ce sera la possibilité d'être rattrapé par le prédateur physique (par exemple une catastrophe naturelle conduisant à la rupture brutale d'un barrage nécessite de fuir plus rapidement que le flot qui s'échappe du barrage) ou biologique (par exemple l'animal agissant plus vite dans sa course, dans le mouvement de ses gestes de saisie); pour le mathématicien, ce pourra être l'insatisfaction voire l'inquiétude apportées par le défaut de compréhension de notions ou de faits mathématiques, de certains éléments d'une démonstration, ou plus grossièrement, par l'absence de solutions d'un problème, créant en lui une forme de déstabilisation locale dite psychologique.

Venons-en à la notion de beauté qu'Aristote associait à celle de symétrie, laquelle est liée à celle de stabilité. Je me permets de reprendre trivialement quelques lignes de [2]. « Un objet est doté de beauté lorsque ses caractéristiques, notamment structurales, éveillent le sourire de l'intelligence, apportent la détente de l'esprit, et le bienfait au corps. Lorsque en effet nous voyons un objet s'établir une sorte de résonance entre les deux structures, celle de l'objet et la nôtre. Nos propres symétries font alors écho aux symétries de l'objet. Leur présence et l'impression de solidité qu'elles donnent, éveillent en nous un ressenti, celui de nos propres symétries, de nos propres équilibres internes, facteurs de stabilité. Dans les cas heureux, ce ressenti s'exprime sous la forme d'un subtil sentiment d'harmonie intérieure, de satisfaction que nous exprimons par une joie plus ou moins discrète, associée à une forme d'affect, d'émotion que nous appelons beauté.

Pour l'essentiel, nous qualifions de Beau ce qui entre en résonance positive avec la structure de notre être, et contribue à assurer la stabilité spatio-temporelle de notre personne, de manière directe ou à travers celle de notre entourage.² »

Cette dernière définition du Beau est globale, elle ne tient pas compte des spécificités de chaque activité. Chacune d'elle comprend différentes phases, différentes étapes, chacune possédant des qualités locales de Beau (ou de laid) associées à sa part de réussite ou d'échec, et dont l'importance pèse dans

² Le laid est au contraire ce qui altère notre stabilité. On comparera ce point de vue partiel sur le Beau avec ceux qui ont été énoncés depuis Vitruve, et notamment tout au long du Moyen Âge. Voir par exemple l'ouvrage d'Umberto Eco que je viens de découvrir: « Art et beauté dans l'esthétique médiévale ».

l'appréciation globale de la création, de l'œuvre, qui est d'abord une représentation des données les plus significatives pour nous de ce que nous percevons de nos mondes extérieur et intérieur. La note globale est une sorte de barycentre des notes locales. Les sensibilités propres à chacun de nous, par nature ou par apprentissage et familiarité, contribuent à nuancer les poids attribués aux différentes composantes de la beauté. Les six propriétés des œuvres artistiques évoquées plus haut sont associées, chacune, aux critères caractéristiques de la beauté de chaque étape et de chaque ingrédient débouchant sur la conception et la réalisation d'une œuvre donnée, mathématique ou non.

Pour chaque domaine d'activité, le contenu sémantique et opérationnel de chacun de ces six points pourrait être longuement approfondi. Par exemple, que faut-il entendre, pour les mathématiques, par perfection et finition? Ne doit-on pas examiner la question selon qu'il s'agit d'un concept, d'une méthode, d'un résultat, de sa démonstration, de son intérêt ou plutôt des intérêts qu'il peut présenter dans tel ou tel domaine des mathématiques elle-mêmes et de leurs diverses applications, des questions voisines se posant également pour, par exemple, une théorie particulière, voire un chapitre important des mathématiques ? L'exposition avec un minimum de caractères, ou faisant appel à un corpus de données préalables minimal sont-ils les seuls critères à envisager ?

Par ailleurs, les six points ne sont pas totalement indépendants les uns des autres. Par exemple, dans quelle mesure le caractère plus ou moins universel d'un énoncé fait-il partie des éléments qui en définissent la perfection?

On comprend que la multiplicité a priori infinie des énoncés, associée au fait que le nombre d'objets mathématiques est d'une belle et assourdissante infinité, rende pratiquement impossible l'évaluation fine de la beauté à l'intérieur de l'univers mathématique. Valeur esthétique et beauté sont des qualifications globales et affectives que, de temps à autre, émettent les professionnels sur leurs sujets de prédilection.

Dans les lignes précédentes, figure l'allusion aux différentes formes d'intérêt que peut présenter une activité particulière, telle ou telle œuvre. Toute œuvre possède un intérêt potentiel. L'exemple de la théorie des coniques développée par Apollonius montre combien il faut être patient avant de reconnaître le degré de pertinence et d'intérêt ici pratique d'une œuvre, en l'occurrence mathématique. Il a fallu attendre rien moins que mille ans environ pour en voir l'usage en astronomie et en astrophysique. Les jugements a priori sur telle ou telle œuvre mathématique sont toujours incomplets et de ce seul fait fort imprudents, les exemples de tels jugements sont légion. Simplement, de par l'ambiguïté des choses de ce monde, toute œuvre porte en elle dans son usage et dans ses effets le meilleur et le pire. Les optimistes

invétérés n'y voient que le meilleur, les pessimistes absolus n'y voient que le pire. Il n'est que de songer à l'attitude compréhensible de Grothendieck qui, un moment, bannissait les mathématiques sans lesquelles il est vrai n'existeraient pas les armes de destruction massive. « Science sans conscience n'est que ruine de l'âme » écrivait déjà Rabelais (1494 ?-1553).

Comme vous le notez, Maître, « Our activity has much in common with that of an artist: a painter combines colors and forms, ... » Ce propos m'a rappelé celui de Léonard de Vinci. Il écrit dans son *Traité de la Peinture* [3]: « La science de la peinture traite de toutes les couleurs des surfaces et de la forme des corps ». On peut alors définir l'art visuel ainsi: un art de représentation matérialisée, caractérisé par la présence fondatrice de la couleur et de la forme.

Or qui dit forme pense aussitôt à géométrie et topologie. Vinci suivait exactement la même démarche de pensée: « Le premier élément de la science de la peinture est le point, le deuxième en est la ligne, le troisième la surface, le quatrième le volume, qui s'habille de la surface » (premier article de la deuxième partie de son traité) ou encore « Il giovanni deve prima imparare profpettiva ».

Qui dit couleur pense à la vibration lumineuse, sa fréquence, sa stabilité qu'exprime le mouvement périodique uniforme à travers le temps et donc, du point de vue de la mathématique qui représente ces phénomènes, qui dit couleur pense d'une part à la théorie des nombres et à ses périodicités secrètes qui s'étalent, se lissent au fur et à mesure qu'on s'éloigne vers l'infini, et d'autre part à l'analyse.

Enfin qui dit représentation matérialisée pense aujourd'hui à ces outils que sont l'impression sur papier ou en 3D, à l'animation visible sur l'écran de l'ordinateur, autrement dit à l'informatique.

Conclusion de ces trois dernières considérations élémentaires, les mathématiques, de manière cachée ou évidente, sont très profondément présentes dans l'art visuel, en sont constitutives, se situent à sa racine, qu'il s'agisse de peinture, de sculpture ou d'architecture.

Le lien entre mathématiques et art visuel étant alors avéré, consistant, solide, ne conviendrait-il pas de le mettre en valeur à des fins pédagogiques, à des fins de recherche et de développement, pour également apporter à nos artistes des éléments nouveaux qui pourraient enrichir leurs créations. C'est dans cette optique et à ces fins que travaille aujourd'hui l'ESMA, l'European Society for Mathematics and the Arts dont on découvrira les diverses activités et réalisations sur le site www.math-art.eu. Je veux croire, Maître, que l'ensemble de ces considérations et de ces perspectives rencontreront votre assentiment et vos encouragements.

Claude P. BRUTER
Président fondateur l'ESMA

Références

- [1] A. BOREL *Mathematics: Art and Science*, EMS Newsletter March 2017, 37-45.
- [2] C.P. BRUTER *Mathématiques et Arts, Deux Conférences, Première Partie*, Scripta Philosophiae Naturalis, 11 Janvier 2017, 1-27. (<http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/claude-p-bruter-mathc3a9matiques-et-arts-deux-confc3a9rences1.pdf>)
- [3] L. DE VINCI *Le Traité de la Peinture de Léonard de Vinci*, Jean de Bonnot, Paris, 1977.