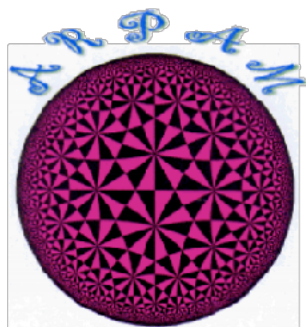


CONFÉRENCE LAUSANNE

Mathématiques & Arts



Arts & Mathématiques



Mesdames, Mesdemoiselles, Messieurs, c'est pour moi un grand honneur et un grand plaisir de partager votre compagnie, grâce à Madame la Professeur¹ Kathryn Hess Bellwald et au département de mathématiques de l'EPFL que je remercie.

Je me propose donc vous parler de mathématiques et d'arts, arts aux pluriels. Mais qu'est qu'un art, sinon une activité d'excellence dans un domaine particulier. Ne parle-t-on pas en effet de l'art musical, de l'art pictural, de l'art architectural, mais aussi de l'art de la médecine, de l'art de la diplomatie ou au contraire de l'art de la guerre, et de façon plus réjouissante et plus conviviale de l'art de la table, celui de la pâtisserie, de la fabrication de chocolats ou de fromages dans laquelle la Suisse excelle ? Qu'est-ce alors un artiste ? Dans notre sens le plus général, toute personne qui pratique un art, une activité de manière excellente et exemplaire, qu'il soit soudeur, mathématicien ou sculpteur. Nous ne ferons donc pas de distinction a priori entre le mathématicien, le danseur, l'architecte et le pâtissier que nous pourrions peut-être rencontrer tout à l'heure.

Quels sont les points communs à tous ces artistes, points communs qui finalement caractérisent l'artiste en soi ? J'en distinguerai six auxquels on peut donner les noms de **Représentation**, de **Perfection**, d'**Inventivité**, de **Singularité**, d'**Universalité**, et de **Phénomènes ondulatoires**.

1. Premier point, l'activité commune de **représentation**. Pourquoi l'on représente, que représente-t-on ? J'y viendrai tout l'heure.

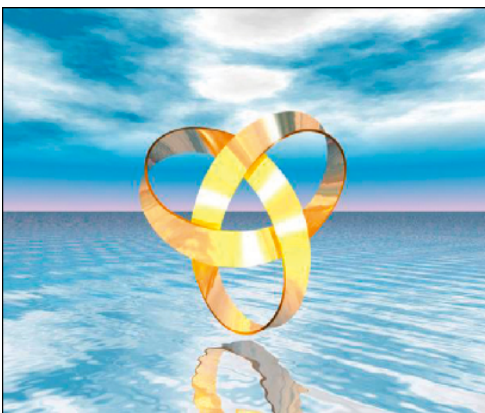
2. Second point commun: **le souci de perfection et de finition**, comme on peut le constater en admirant par exemple cette admirable mosaïque du douzième siècle,

¹Note à l'attention des membres de l'Académie Française: La langue française distingue trois cas: féminin, masculin, et neutre. Une activité donnée peut être exercée tant par une femme que par un homme. De ce point de vue, cette activité présente donc un caractère neutre. Sa désignation mérite donc d'être invariante, quelle que soit la personne qui la pratique. C'est ainsi que la langue vernaculaire parle, selon la personne en exercice, du médecin, ou de la médecin. On ne dit pas la médecine, qui a un autre sens. Par ailleurs et de plus, l'ajout inutile d'une lettre, le e en fin de certaines désignations habituelles, ne contribue pas à la sobriété de l'expression écrite, laquelle a un coût temporel et matériel.



Chapelle Palatine, Palerme

ou par exemple ces trois œuvres, celle d'un sculpteur, à gauche, celle de mathématiciens, au centre, et celle d'un graveur, à droite :



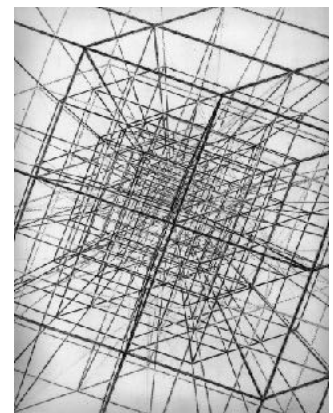
John Robinson (1935-2007)

Immortality (nœud de trèfle)



Tore Norstrand & Bruce

$$(2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - 1/10 x^2 z^3 - y^2 z^3 = 0$$



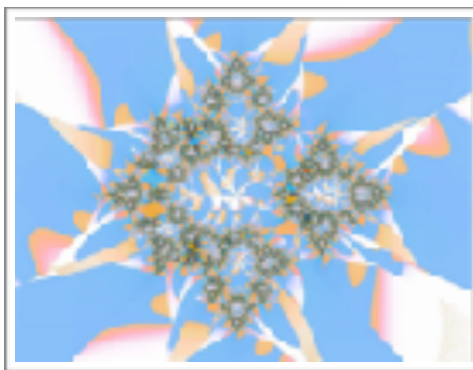
Patrice Jeener

Pavage d'hypercubes

L'attention, le soin que l'artiste figuratif porte à la réalisation de son œuvre sont des garants de sa qualité, des témoignages immédiats de la haute valeur de son savoir-faire. Tout défaut apparent, toute erreur de conception seraient aussitôt sanctionnés.

Il en est de même en mathématique où l'œuvre consiste en la description et dans l'explication d'une donnée abstraite. Le souci de perfection apparaît non seulement dans la qualité linguistique de l'exposition, mais principalement dans l'absence de faille aussi minime soit-elle dans l'explication, appelée en l'occurrence la démonstration. Quand plusieurs preuves peuvent être avancées, on qualifie souvent d'élégante la plus courte, la plus astucieuse d'entre elles. Le souci de perfection s'accompagne ici de la prise en compte de manière consciente de formes d'optimalité dans l'obtention des résultats.

3. Troisième point commun : l'inventivité et la fécondité dont ils font preuve.



Mikaël Mayer



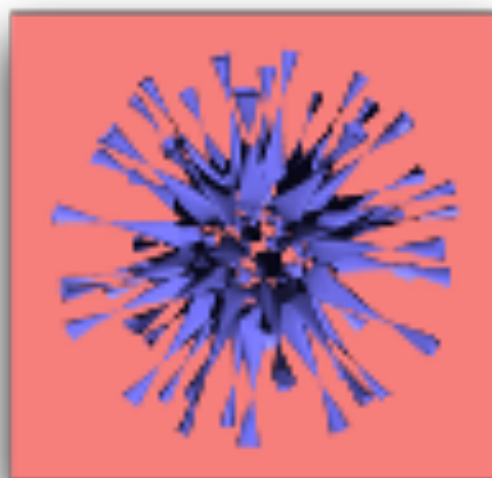
Anatoly Fomenko



Le Douanier Rousseau

$oo(((0.3+1.28i)^*(argch(\arcsin(\exp(x))))^*$ Le retournement de la sphère
 $\exp((3.16-2.44i)+y))+argsh(z^4-z^z)^*argch(z^{-4})/2,6)^*0.5$

Le lion ayant faim



$$T8(x) + T8(y) + T8(z) = 0 \text{ avec } T8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1.$$

Une surface de Barth (réalisée par **Bruce Hunt**) de degré 10 avec 345 points singuliers.

Mikaël Mayer est informaticien, Anatoly Fomenko mathématicien russe récipiendaire de plusieurs prix, Le Douanier Rousseau un peintre célèbre de la fin du dix-neuvième siècle.

Le Douanier (https://fr.wikipedia.org/wiki/Henri_Rousseau) est certes moins inventif et moins fécond qu'un Pablo Picasso, auteur de près de 50 000 œuvres diverses ! Je l'ai choisi ici parce que, par sa vision imaginée de la forêt vierge, il rappelle l'inventivité et de la fécondité de cette grande inspiratrice et créatrice, la Nature elle-même. C'est cette capacité d'invention, cette fécondité qui caractérise la grande œuvre, le grand homme.

Anatoly Fomenko (<http://dfgm.math.msu.su/files/fomenko/myth-vved.php>) crée sans retouche, ce qui ne laisse pas d'étonner. Il nous propose ici une présentation originale des différentes étapes du retournement de la sphère quelque peu éloignée de la mise en œuvre (très technique et très savante) des équations et de la programmation permettant de suivre le déroulement de ce retournement (il s'agit de faire en sorte qu'après retournement sans déchirure entre autres, la face intérieure de la sphère se retrouve à l'extérieur alors qu'inversement la face initialement à l'extérieur soit in fine la face intérieure, voir par exemple https://en.wikipedia.org/wiki/Sphere_eversion). L'invention est d'abord ici présente dans les mathématiques: poser le problème, trouver des moyens pour le résoudre, les mettre en œuvre. L'imagination dont l'artiste fait ici preuve dans la manière élégante avec laquelle il présente les différentes étapes du retournement est un exemple évident de cette étonnante capacité d'invention de l'esprit humain.

L'œuvre de Mikaël Mayer (<http://www.mikaelmayer.com/reflex/>) témoigne de l'inventivité des mathématiciens et l'on peut dire des mathématiques elles-mêmes. C'est le programme imaginé et construit par le créateur, son contenu qui, ici, par ses capacités combinatoires et son comportement aléatoire, engendre une foule de dessins, de motifs. L'auteur choisit alors de nous montrer ceux d'entre eux qui le séduisent par leurs qualités esthétiques intrinsèques. Alors que dans les deux œuvres précédentes, la main de l'artiste est éminemment présente dans l'étape finale de la réalisation matérielle de l'œuvre, un nouveau pas est ici franchi vers le détachement de la fonction corporelle associée à cette réalisation.

La dernière œuvre est plus classique, une sorte de cloche éclatée qui remplit l'espace d'un immense fonds sonore bleuté: une manière de célébrer, cette année 2016, son vingtième anniversaire. Cette surface appartient à toute une famille d'objets mathématiques définis par des équations polynomiales, obéissant à des règles de symétrie précises qui contribuent fortement à leur conférer des qualités esthétiques. L'inventivité est ici celle des mathématiciens qui se posent de bonnes questions, elle est aussi des mathématiques en soi qui nous font découvrir ces surfaces riches dont les éléments sont assemblés de manière souvent inattendue.

Pour ce qui est des œuvres mathématiques, elles possèdent un avantage sur les œuvres ne se pliant pas à leurs contraintes. Car la richesse de ces œuvres mathématiques est évidemment liée aux potentialités infinies qu'apporte l'infinité des nombres. On obtient par exemple une nouvelle surface en remplaçant dans l'équation de la surface de Barth précédente l'un des nombres 2, 4, 6, 8, par un autre nombre, quel qu'il soit. Pour paraphraser Shakespeare, avec peut-être sa permission : « Il y a plus de choses sur la terre et dans les mathématiques, Horatio, qu'il n'en est rêvé dans votre philosophie ».

4. Quatrième point commun : la singularité, l'originalité et la pertinence des œuvres qui les rendent si attirantes et si importantes.

La galerie impressionnante de photos qui suit rend, et à laquelle je succombe, rend compte assez bien de ces trois caractères qui vient d'être cités. Il s'agit de fascinants pavages au sol présents dans la Chapelle Palatine à Palerme ou dans la cathédrale voisine de Monreale. Ils sont tous différents et originaux, uniques en soi, donc singuliers, attirants, suscitant la curiosité comme toute œuvre inhabituelle, éveillant l'intérêt qui témoigne d'une pertinence authentique, peut-être cachée, à préciser.





Si chaque œuvre est singulière, certaines possèdent plus que d'autres des caractères d'originalité. C'est le cas de la plupart des œuvres de Dali.



Dali. Cygnes réfléchis en Eléphants, 1937.

Voici une œuvre bien construite: un axe de symétrie vertical, un autre horizontal, marquant la limite du ciel et de la mer. Et puis cette avancée de la mer à l'intérieur d'une crique: entourés d'arbres, trois cygnes se mirent dans le miroir de l'eau, qui renvoie l'image d'éléphants. Une œuvre pleine de fantaisie et d'humour.

Dali est aussi l'un des meilleurs peintres du siècle dernier qui se soient intéressés aux mathématiques, accueillant chez lui Tom Banchoff puis René Thom. Son œuvre porte la trace évidente de ces rencontres.

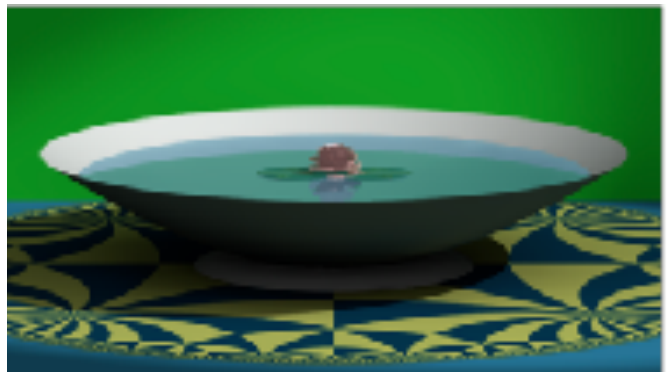
5. Cinquième point commun: l'universalité des œuvres:



Grotte Chauvet (-30 000)



L'Offrande de Ramsès au dieu Ptah-Sokar-Osiris et à la déesse Isis



Vase hyperbolique posé sur un napperon hyperbolique

Bruter-Leys

L'universalité se conçoit et dans l'espace et à travers le temps. Il s'agit d'une forme extrême de stabilité spatio-temporelle.

Les grandes œuvres artistiques, pour autant que les hommes et les éléments ne viennent pas les détruire, possèdent cette propriété de stabilité temporelle. Nous admirons toujours les gravures préhistoriques présentes dans les grottes et cavernes, ou la scène d'offrande qui orne la tombe de Ramsès III, et date d'environ 3000 ans.

Le vase reposant sur le napperon est une commande que j'ai passée à Jos Leys. Elle ne prétend nullement avoir la valeur artistique des œuvres précédentes: elle est là pour illustrer, symboliser la présence et la pérennité des mathématiques.

Les œuvres mathématiques, c'est-à-dire les énoncés qui constituent le corpus de la mathématique, ont à nouveau un autre avantage sur les œuvres d'une autre inspiration. Certes, si on exposait la Joconde sur Mars, tous les martiens ne manqueraient pas d'accourir pour l'admirer. Mais encore faudrait-il qu'on puisse déplacer sans difficulté ce chef d'œuvre jusqu'à notre lointaine voisine. Leur universalité est davantage temporelle que spatiale. Et l'on notera également que l'universalité des œuvres d'art autres que mathématiques n'est que relative: car l'humanité et toutes ses œuvres peuvent disparaître à la suite d'un cataclysme quelconque.

Par contre, les théorèmes de mathématiques sont vrais dans tout l'univers, et ne s'effacent pas avec le temps. Ce sont des vérités intemporelles, immuables au centre de la terre, à l'intérieur du soleil, et même au plus profond des trous noirs.

6. Un dernier point commun à la plupart sinon à tous les arts est le rôle joué par la présence des phénomènes ondulatoires, et l'infini multiplicité de leurs fréquences.

Pour ce qui concerne notamment les arts visuels et l'art mathématique, on n'insistera jamais assez sur le rôle merveilleux de la **lumière**, quand bien même il nous paraît évident. La lumière, le monde des photons jouent d'abord un rôle constitutif dans notre univers atteignable qui va du physique jusqu'au vivant.

Sur le plan des arts figuratifs, la lumière nous fait voir la forme des objets, assure leur relief, souligne les nuances caractéristiques et révélatrices de leur constitution. Elle donne les éléments fondamentaux de leur représentation.

J'ai choisi, pour évoquer son rôle dans ce milieu des arts, cette œuvre émouvante. A quoi, à quel avenir pour son enfant silencieusement endormi, songe dans une pénombre expressive ce doux et lumineux visage d'une maman attentive ?



Georges de La Tour. Sainte Anne avec l'Enfant Jésus, vers 1645-1650.

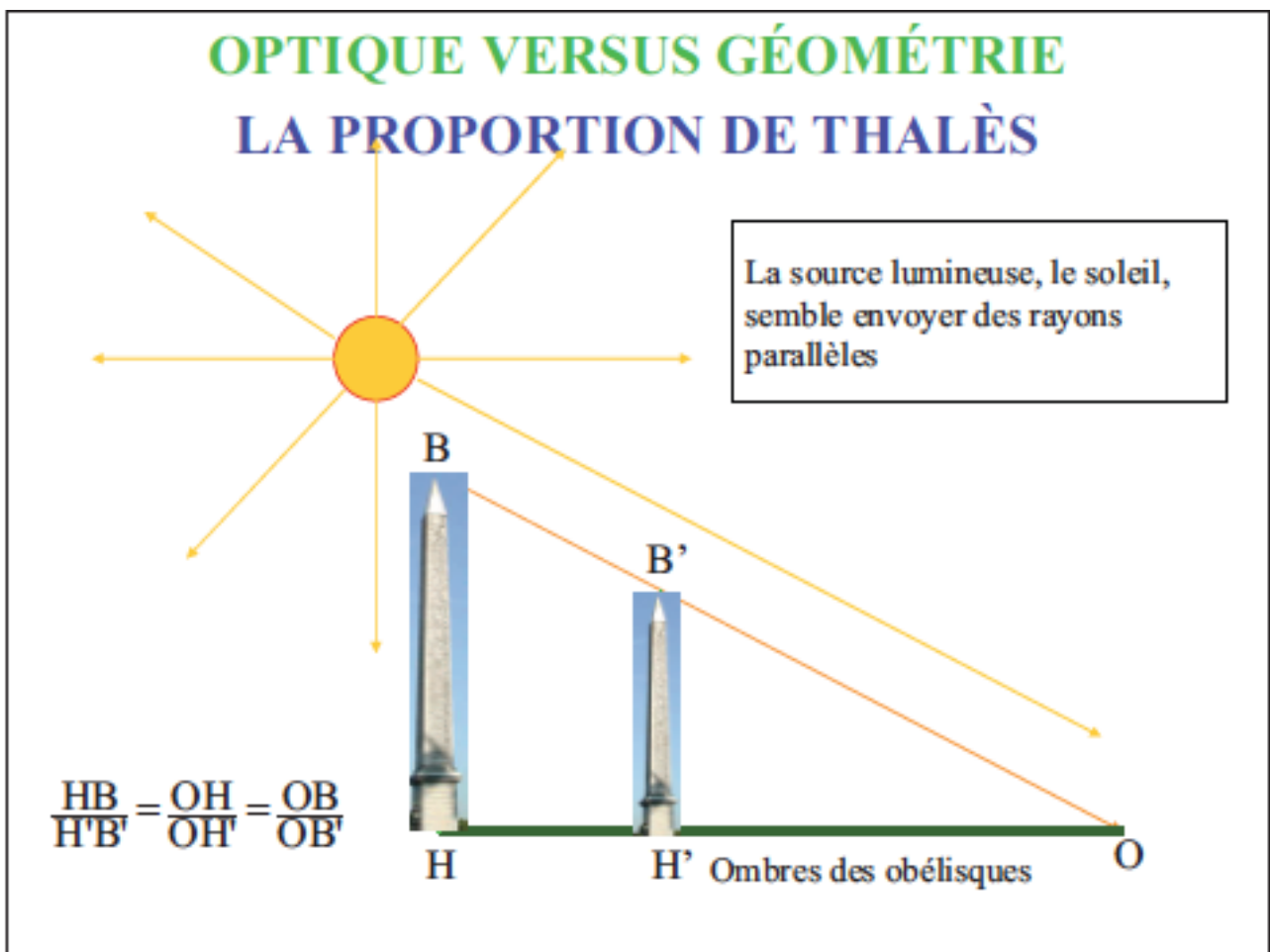
La lumière, c'est d'abord pour nous le soleil, créateur sur le sol des ombres des objets. Il en projette les contours, il en définit les formes.

Archimède dessinait-il sur le sable au moment où il perdit la vie ? Sumériens, Egyptiens, Pythagoriciens, faisaient-ils cours devant leurs disciples à l'aide d'un tableau noir ? Le mythe de la caverne n'aurait-il pas pu être suggéré à Platon par la manière dont il enseignait la géométrie ?

Il n'est pas alors trop aventureux de penser la première géométrie plane comme l'étude sur le plan du sol des ombres des objets éclairés par le soleil. Rappelons également que l'origine de la perspective, de la géométrie projective provient de la conception des Anciens, partagée encore par nombre de savants au

XVIIe siècle, imaginant des sortes de rayons lumineux qui partaient de l'oeil pour atteindre les objets effectivement vus.

L'énoncé qui fonde la géométrie euclidienne du plan est une observation d'optique géométrique entre l'objet et son ombre. Il porte le nom célèbre de « théorème » de Thalès :



Soulignons ici la parenté, le mot est faible, d'une procédure générale employée souvent inconsciemment par les mathématiciens, avec celle que l'exemple des obélisques « de Thalès » nous décrit: la Nature, en l'occurrence le soleil, projette sur le plan du sol, c'est-à-dire sur un espace de dimension inférieure ici deux et plus accessible à notre entendement, un objet plus ou moins mystérieux, l'obélisque, situé dans un espace de dimension plus élevé, ici trois.

Dans les premiers temps de la recherche et de la découverte, c'est également par l'étude de leurs projections, de leurs « ombres », sur des espaces de

dimensions plus petites que sont révélées aux mathématiciens les propriétés des objets énigmatiques placés dans des espaces de dimensions plus importantes.

Convenons alors, en référence au mythe fameux de la caverne, d'appeler « Problème de Platon » le problème en quelque sorte inverse du précédent: étant donnée une ombre, une projection, quel objet en est véritablement la source, où se situe-t-il, quelle en est la structure, quelles en sont les propriétés internes, et même l'origine, les raisons de sa présence ?

Exemple de mathématicien renommé ayant pratiqué cette démarche ?
Eberhart Hopf, de l'Université de Bâle.

La projection est l'une des formes de représentation, première activité que partagent tous les artistes et au-delà tous les êtres du monde biologique. Nous voici revenus sur le point n°1, celui de la représentation.

Vous conviendrez tout d'abord que tout être vivant a besoin, pour assurer sa présence, sa stabilité, à travers l'espace et à travers le temps, de connaître les propriétés de son environnement, propriétés qui peuvent lui être aussi bien maléfiques et que bénéfiques. En d'autres termes tout être humain en particulier a besoin de créer, et crée de manière constante, des représentations de cet environnement.

Représenter, voilà donc qui est assurément commun à nous tous. Quand il voit une personne, le mathématicien dessine le chiffre un sur sa feuille de papier, l'artiste visuel dessine un bonhomme sur sa toile.



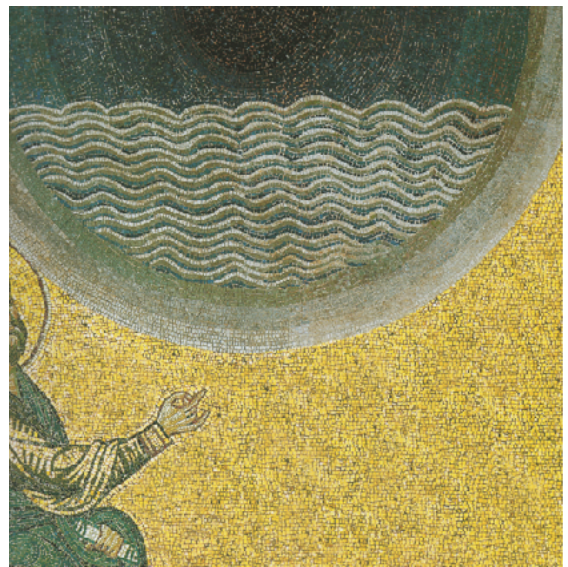
Les deux dessins ne se ressemblent-ils pas ? Ainsi, à première vue, être mathématicien ou artiste visuel, c'est à peu près la même chose. Tous deux représentent, et commencent par faire des **dessins** !

Nous savons maintenant pourquoi l'on représente, pour assurer notre présence dans l'espace et à travers le temps. Que va-t-on représenter en premier ? Bien sûr, ce qui est le plus important pour nous, et donc en particulier le monde physique très stable, qui nous entoure, que nous cherchons à connaître, à comprendre pour mieux nous protéger de ses caprices, pour mieux bénéficier de ses dons.

Regardons ces très belles mosaïques du douzième siècle, créées probablement autour des années 1170. Des œuvres de grands artistes assurément.



Chapelle Palatine. Création du soleil, de la lune et des étoiles.



Cathédrale de Monreale. Création du ciel et des océans.

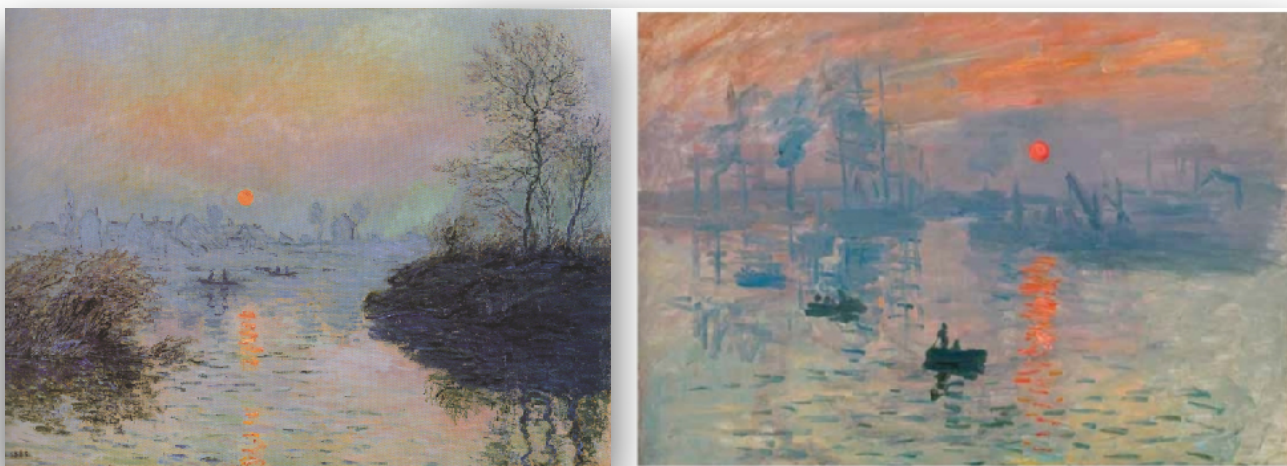
Ils nous montrent la naissance du monde selon les conceptions de l'époque que nous présentent les savants personnages situés à gauche et au-dessous des mosaïques. Admirons le choix heureux des couleurs, la perfection de la réalisation, mais aussi la présence de tous ces éléments devenus mathématiques, ces cercles parfaits, ces polygones étoilés parfaits, leur savante répartition qui a dû nécessiter bien des calculs ! Artistes ou mathématiciens ? Mathématiciens ou artistes ?

Un grand mathématicien du siècle dernier, également excellent pianiste, Henri Cartan, a écrit ceci :

« Dans le discours que j'ai prononcé le premier février 1977 à l'occasion de la réception de la Médaille d'Or du CNRS, j'ai tenté de défendre la thèse selon laquelle les mathématiques relèveraient plutôt de l'art que de la philosophie. »

Henri Cartan était-il mathématicien ou artiste, ou bien les deux ? Le point de vue de Cartan n'était nullement isolé. On citera par exemple ceux de deux mathématiciens du siècle précédent, le dix-neuvième, versés en particulier dans la théorie des nombres: Leopold Kronecker pour qui les mathématiques relevaient de l'art et de la science, et son contemporain, ils sont tous deux nés en 1823, Gotthold Eisenstein, pour qui les mathématiques relevaient seulement de l'art.

Voici maintenant un autre exemple de l'imprégnation du monde physique dans l'œuvre d'art. Regardons ces deux tableaux de Monet:



Monet. Impressions: Soleil Couchant (1880) & Levant (1872).



Ils nous montrent, tout comme le fait la mosaïque précédente séparant le ciel de la mer, une ligne d'horizon qui ondule de manière régulière avec cette fois, en plus, le disque solaire que les mathématiciens représentent par le dessin suivant: \mathbf{D}^2 . Observez aussi dans toutes ces œuvres, la présence de deux symétries fondamentales: l'une verticale qui correspond à la pesanteur, l'autre horizontale permettant d'équilibrer le tableau, de lui conférer une sorte de stabilité.

Cependant, le léger décalage du soleil par rapport à l'axe de symétrie vertical du tableau, contribue à créer une sensation de mouvement, un certain dynamisme présent dans le spectacle qu'observe Monet.

Dans le tableau suivant de Van Gogh,



Van Gogh. La nuit étoilée, 1889.

le peintre se fait astronome. Peut-être était-il au courant de la découverte, une quarantaine d'années avant de faire son tableau, de l'existence de la galaxie spirale du tourbillon dont voici une photo :



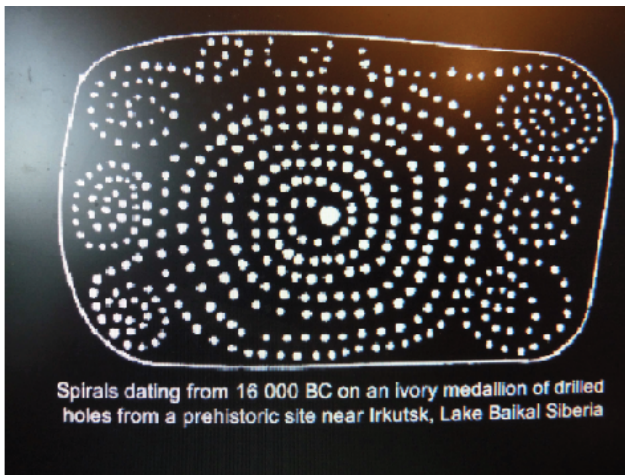
Van Gogh décrit deux des mouvements fondamentaux du monde physique: le mouvement circulaire, la rotation, et le mouvement spirale, celui-ci comme combinaison du mouvement fermé de rotation, et du mouvement transverse ouvert de translation, de déplacement rectiligne. Un important théorème que j'appelle le théorème d'Aristote-Liouville énonce que, dans tout espace, tout mouvement local est composition de mouvements de rotation locale et de translation locale. Ce sont exactement les mouvements que font le dessinateur, l'écrivain, le peintre, le sculpteur, le violoniste quand ils exécutent une œuvre.

Le mouvement spirale est un universel, dans le monde mathématique, dans le monde physique, dans le monde biologique, dans la décoration, en architecture. Immense est la quantité d'œuvres qui témoignent de sa présence. En voici quelques-unes empruntées à l'art visuel.

D'abord ces sortes de sculptures faites par Nat Friedman à partir de coquillages habituels:

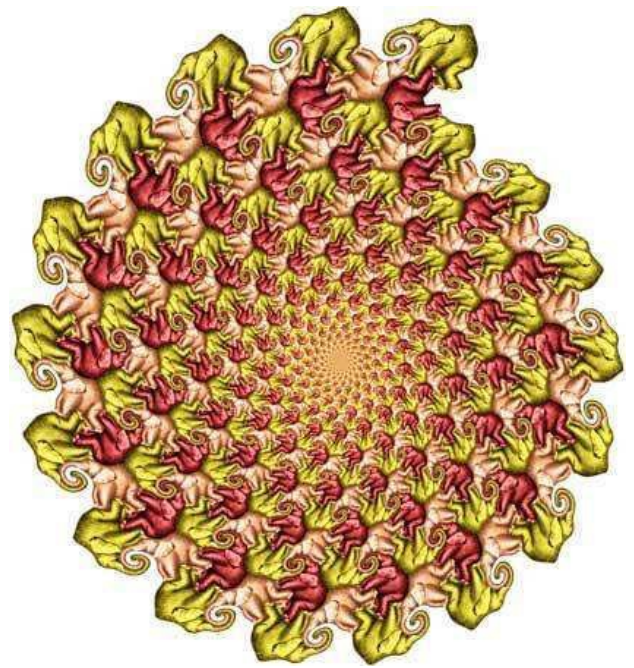
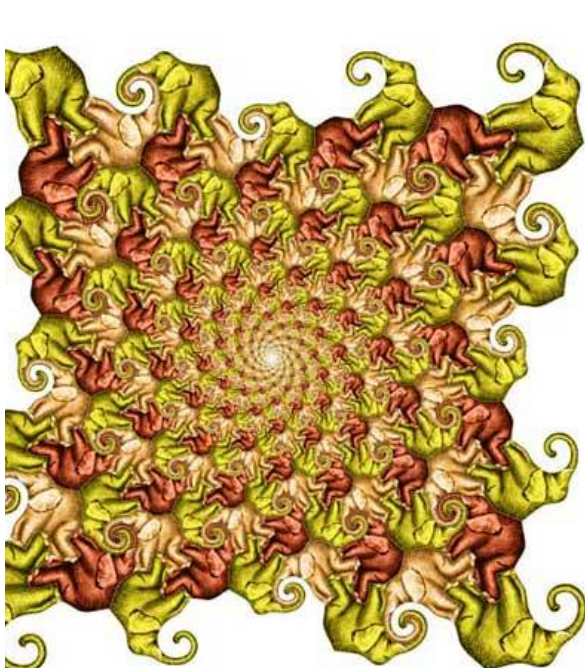


Puis ces deux gravures exemplaires sur ivoire qui ont 16000 ans d'âge:

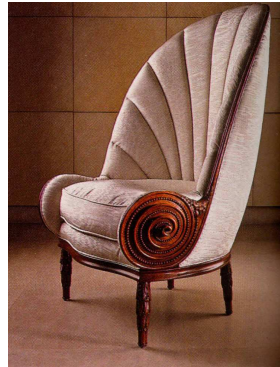


Gravures sur ivoire trouvées près du lac Baïkal, -16000.

Pardonnez-moi de faire simplement défiler devant vos yeux quelques images d'œuvres illustrant ce mouvement, on les rencontre dans toutes les civilisations, à toutes les époques. Voici quelques exemples décoratifs respectivement égyptien, grec, suédois, ou récent, l'auteur est Dominique Ribault:



Mais franchissons les siècles jusqu'à la période moderne. Voici quelques exemples en décoration, en menuiserie, en ferronnerie,



Une bergère de Paul Iribe, exceptionnelle par la finesse de ses spirales sculptées en noyer (1913).

1923



10, Bd de Port-Royal, 6^{ème} (G. Jacquet 1937)



3, rue Mouthon, 15^{ème}

en architecture:

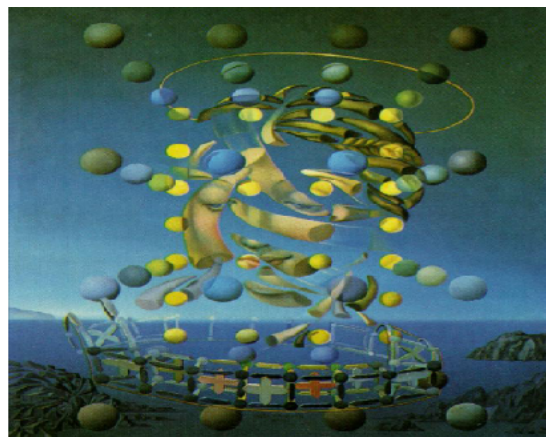


Tour nommée Turning Torso à Malmö (Suède)
(Calatrava 1999-2004)

En peinture, je prendrai comme exemple ces trois œuvres du facétieux Dali:



Ascension, 1958.



La vitesse maximale de la Madona de Raphaël, 1954.



Tête raphaélesque éclatée, 1951.

Les deux dernières correspondent à un phénomène naturel, un mouvement légèrement tourbillonnaire de nuage que j'ai observé dans les Alpes, où il semble qu'au voisinage d'une zone restreinte singulière le mouvement nuageux spirale selon deux directions horizontales opposées:



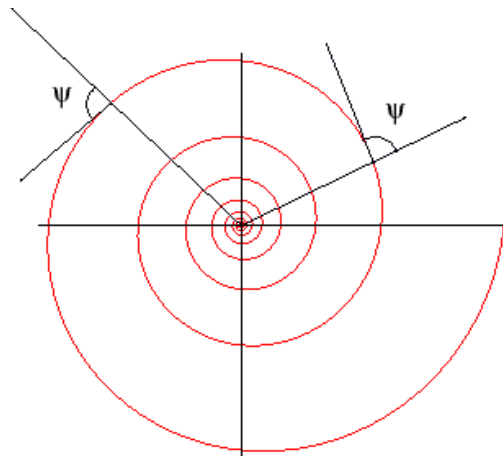
Mais à propos de ces œuvres, on ne résiste pas au plaisir de lire ce commentaire de Dali lui-même qui, dans son livre intitulé « Oui », se proclamait le fondateur de « la méthode paranoïaque-critique » :

« Mais soudainement je découvris que, dans les entrecroisements des spirales qui forment le tournesol, il y a évidemment le galbe parfait des cornes de rhinocéros.

Maintenant les morphologues ne sont pas du tout sûrs que les spirales du tournesol soient de vraies spirales logarithmiques; ce sont des spirales qui approchent beaucoup, mais il y a des phénomènes de croissance qui font qu'on n'a jamais pu les mesurer avec une exactitude rigoureusement scientifique; et les morphologues ne sont absolument pas d'accord si ce sont des spirales logarithmiques ou non.

Mais, maintenant, je me suis renseigné à propos de la corne du rhinocéros elle-même : alors là, il n'y a aucun doute, il n'y a jamais eu dans la nature un exemple plus parfait de spirale logarithmique que dans le galbe de corne de rhinocéros. ²»

Voici en bref, extraite de <http://www.mathcurve.com/courbes2d/logarithmic/logarithmic.shtml>, une image d'une vraie spirale logarithmique, dotée de plein de propriétés inattendues:



²Je recommande de poursuivre la lecture du texte de Dali, lorsque, quelques pages plus loin, il analyse avec intérêt une peinture de Raphaël, puis reprend ses considérations farfelues sur son obsession rhinocentrique. En particulier, sa description mathématique d'un rhinocéros vu de dos n'est pas piquée des hannetons.

à cette image est joint le commentaire suivant:

Courbe étudiée par Descartes et Toricelli en 1638, puis par Jacques Bernoulli (1654-1705).
Autres noms : spirale équiangle, *spirale de Bernoulli*, *spira mirabilis* ; le nom "spirale logarithmique" a été donné par Varignon.

Jacques Bernoulli a fait graver une spirale logarithmique sur sa tombe dans la cathédrale de Bâle, avec l'épigraphe : *eadem mutata resurgo*, "déplacée (mutata), je réapparais (resurgo) à l'identique (eadem)". Cependant, le graveur a tracé une spirale d'Archimède...



On voit alors que le galbe de la spirale logarithmique n'est tout fait celui, selon Dali, d'une corne de rhinocéros, c'est le moins qu'on puisse dire. On devine toutefois, à travers le texte de notre peintre, que derrière ses élucubrations volontairement fantaisistes, Dali avait de réelles connaissances mathématiques. Il aimait d'ailleurs, nous l'avons déjà évoqué, s'entourer de mathématiciens qu'il interrogeait, et qui lui ont inspiré plusieurs tableaux dont le contenu, du point de vue mathématique, n'est pas tout à fait élémentaire.

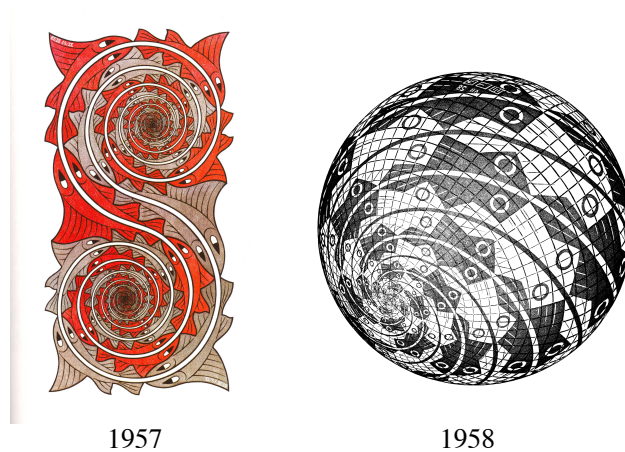
Dali a donc utilisé des spirales pour illustrer des mouvements. Elles portent alors le nom en mathématiques de *trajectoires*. Regardez la traînée laissée dans le ciel par l'avion qui vole au-dessus de vos têtes: vous avez là la matérialisation de la trajectoire de l'avion.

Les mathématicien étudient toutes sortes de trajectoires, c'est la théorie dite des systèmes dynamiques. Dans les œuvres que nous avons rencontrées, les artistes visuels ont simplement utilisé le concept de spirale que l'on peut définir de manière très précise à l'aide de notions mathématiques. Mais on observe que chaque spirale artistique est différente de toute autre.

On peut cependant passer de l'une à l'autre par un jeu de déformations qui portent la marque de leur auteur. La différence entre le mathématicien et l'artiste visuel se situe en ce point. Ce qui intéresse le mathématicien est de bien définir et de caractériser toute classe d'objets par le fait qu'elle est invariante par déformation. L'artiste visuel cherche presque au contraire à trouver la

déformation originale et esthétique qui éveillera les sens et marquera l'esprit. Cette originalité porte sa marque.

Dans les illustrations que nous avons vues, comme dans celles-ci de Escher,



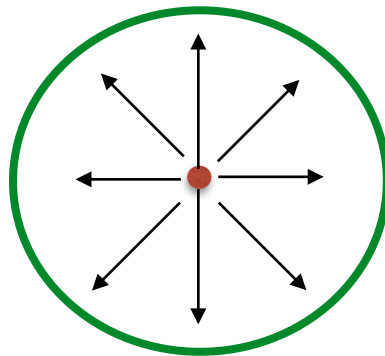
1957

1958

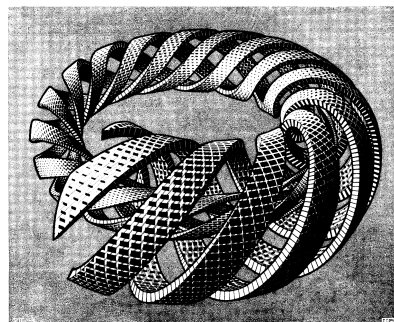
les trajectoires se dirigent, convergent vers un point. Ce point est appelé un *point attracteur*.

Un point est un cercle de rayon zéro, de rayon nul.

Cette singularité peut éclater, se déployer en un cercle de rayon non nul.

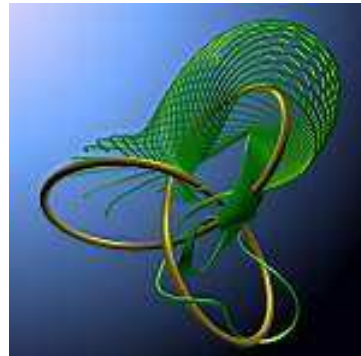
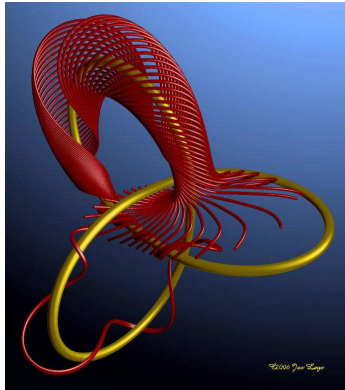


Il semble bien, dans cette œuvre suivante également de Escher, que le ruban qui symbolise la trajectoire vienne s'enrouler autour d'un cercle intérieur non visible.

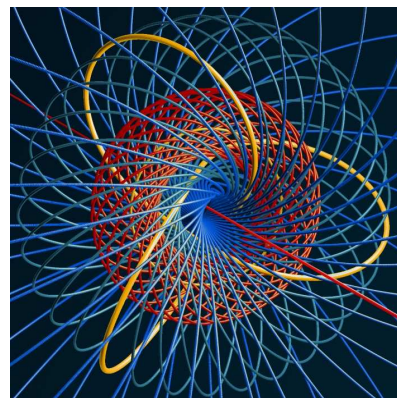
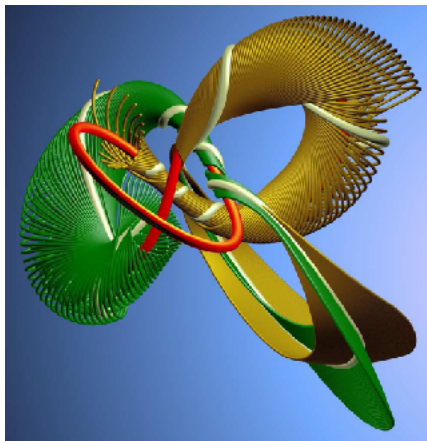


L'attracteur serait donc cette fois-ci un cercle. Un cercle, c'est-à-dire une corde infiniment mince dont on a soudé les extrémités, plongé dans l'espace s'appelle le *nœud trivial*.

On peut fabriquer avec des fils une infinité de nœuds différents non triviaux. Le nœud à trois feuilles ou *nœud de trèfle* est parmi les plus simples. En voici quelques exemples:



Leys. Attracteurs levogyre et dextrogyre.



Fibration de Seifert

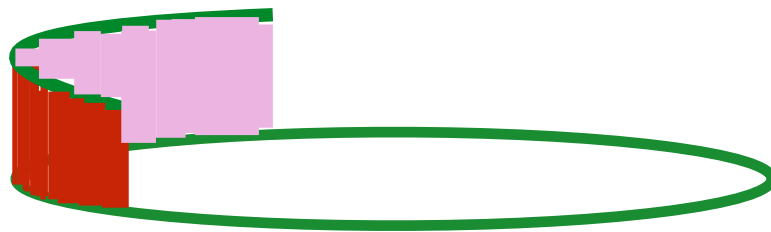
Il y a bien des façons de déployer les nœuds en les épaississant, et bien des façons de les épaissir. Voici, extraite du *Nimbus 'Book of Recipes*, la recette qui permet d'épaissir rapidement tout objet, comme par exemple le nœud trivial.

L'objet à épaissir est évidemment considéré comme la base (de l'épaississement) et par suite appelé de ce même nom, base.

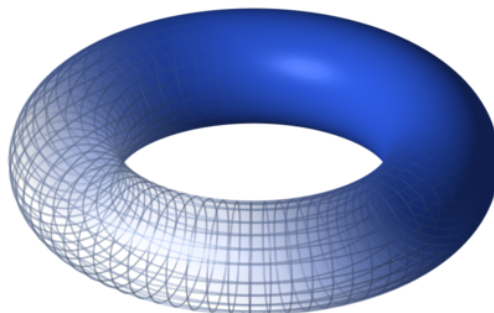
La recette toute simple consiste:

- premièrement à acheter un sac de fibres alimentaires mathématiques, toutes de même type: ce sont par exemple toutes des segments de droite, ou bien toutes des cercles.
- deuxièmement à planter en chaque point de la base une fibre.

Voici deux exemples de mets mathématiques que l'on peut obtenir:



Vue partielle d'un Tronc de Cylindre homogène à base circulaire (il est réalisé avec des segments de longueur identique, disposés verticalement, orientés dans la même direction)



Tore trivial homogène (il est réalisé avec ces cercles de diamètre identique situés dans des plans verticaux)

La recette ne dit rien sur les propriétés des fibres - qu'est-ce qu'une fibre mathématique ? -, elle ne dit rien non plus sur la façon de planter ces fibres. Cette recette élémentaire ouvre un champ infini de possibilités.

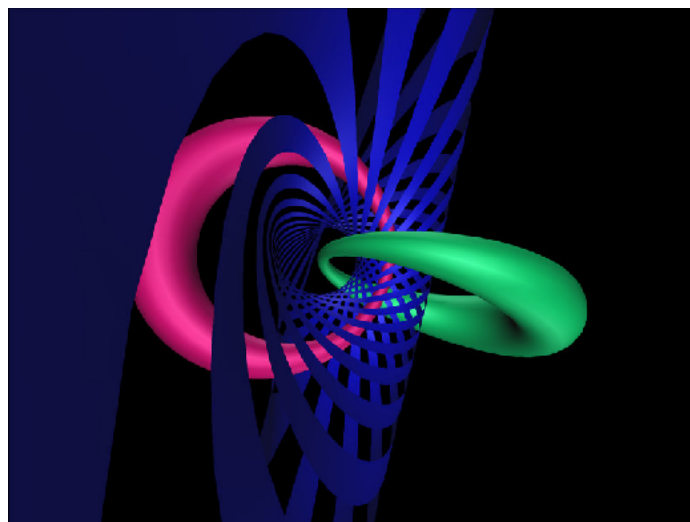
Dans le cas particulier, celui de la figure bleue, où la base est un cercle, où les fibres sont des cercles de même diamètre disposés dans des plans verticaux, l'objet mathématique est appelé un **tore trivial**.

Les versions « pâtissier » des tores sont très appréciées:

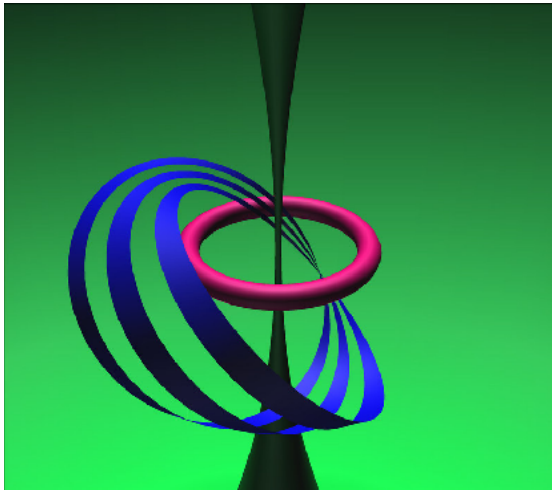


No comment

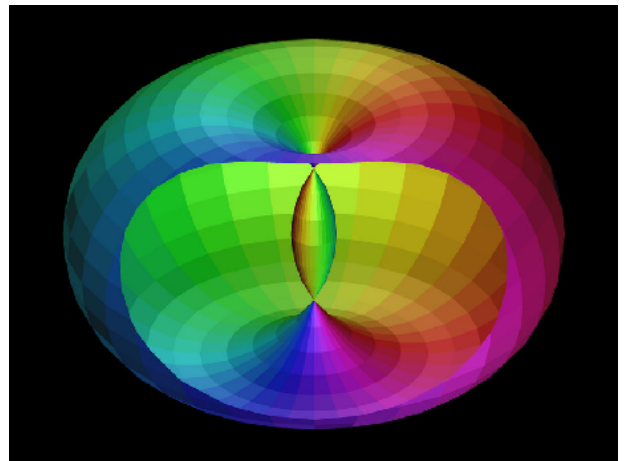
Voici quelques exemples d'objets ou de « décors » mathématiques obtenus avec des tores dont la fibre est un cercle et qui ne sont pas forcément triviaux:



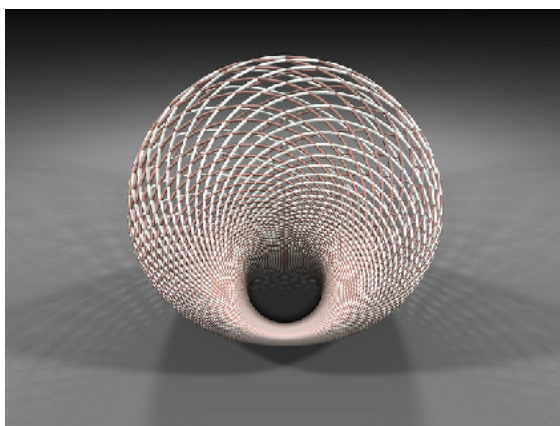
Thomas Banchoff. Pendulum tori.



Thomas Banchoff. Hopf links



Thomas Banchoff. Spindle torus.



Francesco de Comité. Cyclide de Dupin.

Mais on peut également utiliser d'autres fibres comme par exemple le triangle plein, et faire varier continûment leur orientation, ce qui nous conduit par exemple à ces deux sculptures:

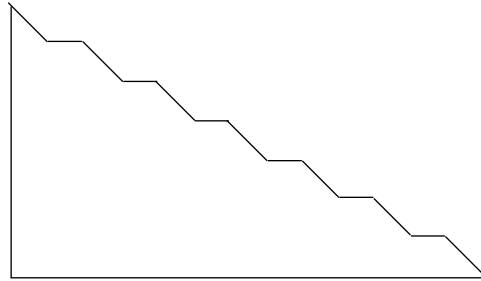


Franc Savnik. Evasiveness (120 triangles équilatéraux, bronze poli).



Philippe Charbonneau. Trois tores en réflexion, 2016.

L'animation suivante qu'a bien voulu faire pour nous Jos Leys (http://www.josleys.com/gfx/Tore_CB_01.mov), montre une construction du tore trivial plein dans un premier temps, puis dans un second temps la déformation de ce tore dont la fibre devient un triangle plein en forme de gradin comme celui-ci:



L'équivalent architectural de ce tore, de cette déformation du tore trivial plein, est par exemple ce monument, les arènes de Vérone, aujourd'hui célèbre par les opéras magnifiques qu'on y donne:



Vérone

ou encore celui-ci, les arènes de Nîmes, où l'on pratique certains jeux dont nous allons voir l'un des acteurs principaux.



Nîmes

Mais revenons sur cette notion de déformation si générale dans la nature. Pour le **géomètre**, le triangle et le cercle sont deux objets bien différents car le géomètre prend en compte de manière importante toutes les mesures (de longueur, angulaires) qui caractérisent chaque objet. Mais pour celui, appelé le **topologue**, qui se moque des questions métriques, pour qui la notion plus intrinsèque et plus fondamentale est celle de connexité, le cercle et le triangle sont des expressions du même objet: on se déplace sur le cercle et sur le triangle de la même façon. Cet objet topologique est continûment déformable, et peut se présenter sous l'apparence d'un carré, d'un polygone, d'une ellipse que l'on peut elle-même déformer à souhait. Les mathématiciens l'appellent icic une *sphère topologique de dimension 1*.

On appellera alors de manière générale « tore topologique » \mathcal{T}_K (respectivement plein) tout objet dont la base est un nœud K et la fibre une sphère (respect. un disque) topologique.

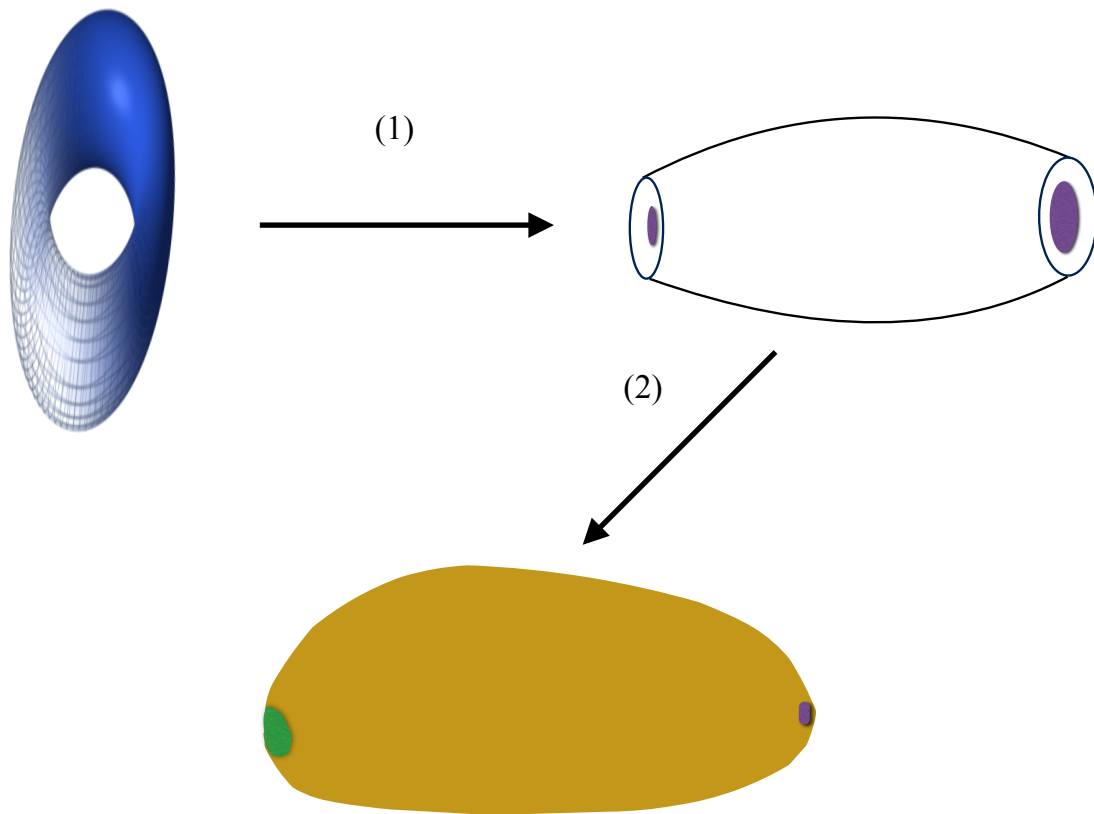
En voici un exemple:



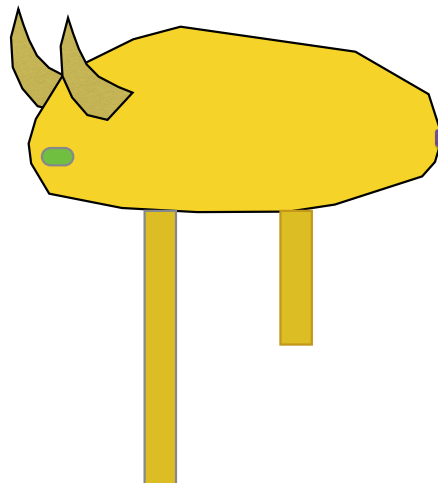
Dominique Ribault. Tore topologique à base de « trèfle ».

De manière inattendue, les acteurs présents dans les arènes de Nîmes, nous allons décrire leur apparence, sont également des tores topologiques dont la base est un cercle ou plutôt la déformée d'un cercle, une sphère topologique de dimension 1.

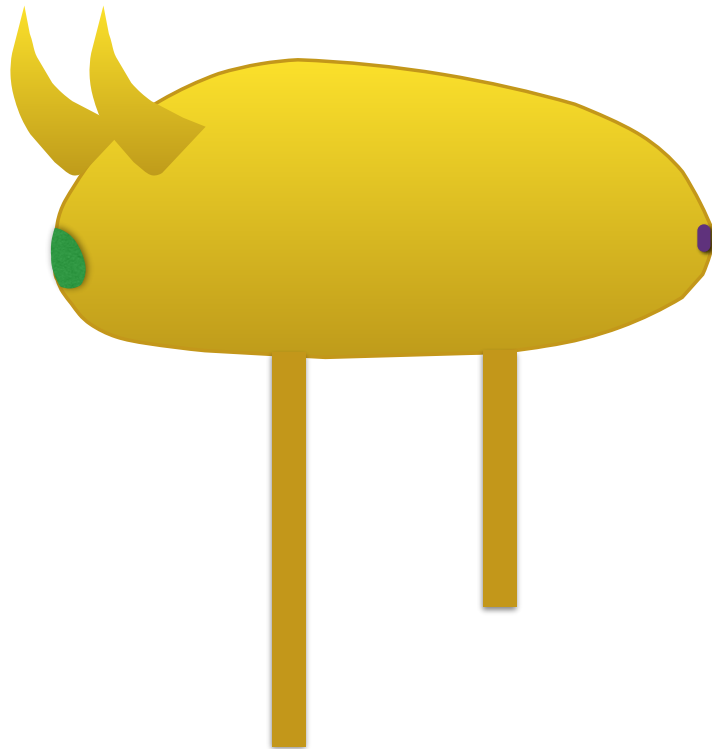
Première étape de sa description, on prend un tore bleu que l'on déforme par simple étirement (1), puis que l'on peint et que l'on déforme à nouveau (2):



Enfin dans une dernière étape, on déforme la partie supérieure de sorte qu'apparaissent deux cornes de Dali, et on déforme la partie inférieure de sorte qu'apparaisse l'équivalent de quatre pattes:



Nous découvrons alors le héros des jeux du cirque, arborant fièrement la couronne d'Alexandre, un t'or ciselé d'où s'échappent des volutes spirales en or:



Hommage à Dalí: Tore Haut

Le tore est loin d'être le seul objet mathématique incarné en architecture. Le rectangle (le pan de toit), le cube (l'immeuble moderne !), le cylindre (la colonne), la sphère (le dôme) en sont des exemples simples et communs.

Un projet de parc de promenades mathématiques propose d'autres incarnations d'objets très anciens comme les quadriques,

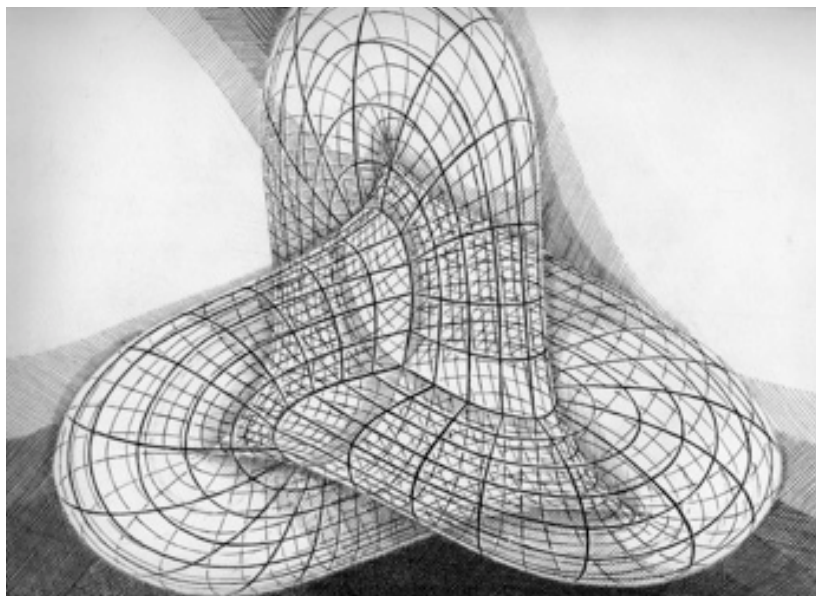


ou récents comme le parapluie de Hassler Whitney, mathématicien américain du siècle dernier qui eut des rapports privilégiés avec la Suisse - grand amateur d'alpinisme, ses cendres reposent près du sommet des *Dents Blanches*; c'est aussi en venant suivre les cours d'une masterclass de violon en Suisse qu'après avoir écouté une belle conférence de mathématiques, il décida de choisir la voie de la science.

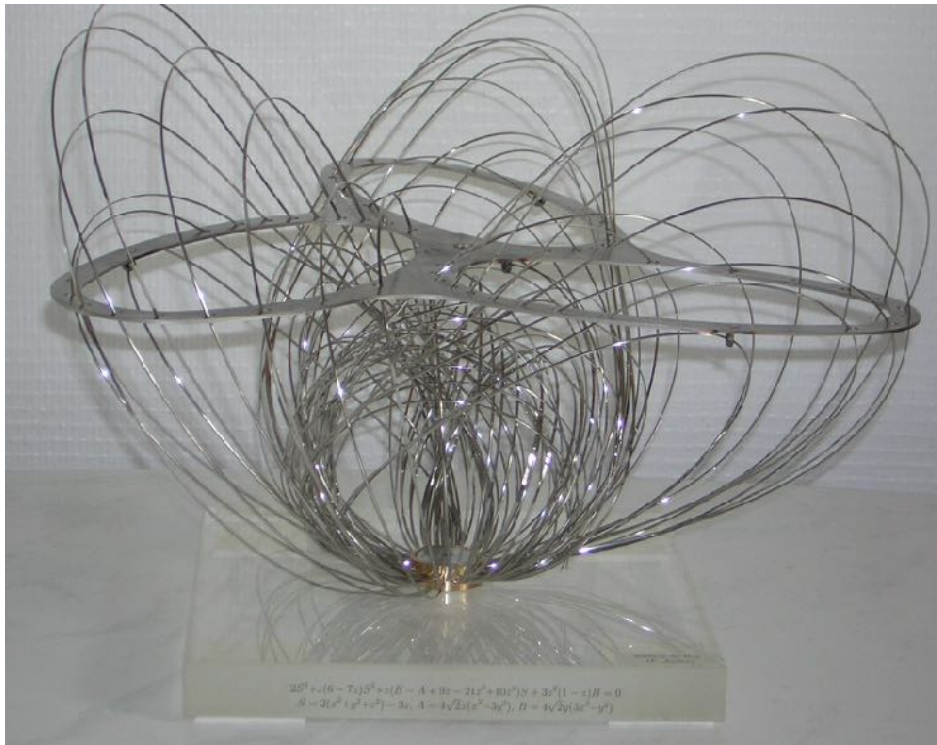


Les trois visualisations précédentes sont l'œuvre de Dmitri Kozlov.

Encore plus récents sont les travaux inspirés par la recherche de la représentation algébrique et géométrique de l'espace projectif « ordinaire », sous la forme de la surface de Boy:



Patrice Jeener. Surface de Boy.



François Apéry. Surface de Boy en ellipses.

Peut-être viendra-t-on admirer un jour cette incarnation dans le verre de la maintenant célèbre surface de Boy (cliquer sur l'image):

Parc de Promenade et d'Activités Mathématiques

Claude Paul Bruter

Surface de Boy

Notes « historiques »

1. Ce texte reprend deux thèmes déjà présents dans les conférences précédentes, de Saverne (2012), d'Etampes (2015) et de Florence (2016): celui des liens entre mathématiques et arts, l'universalité du motif « spirale ». On pourra lire les textes de ces conférences en se rendant sur [http://www.math-art.eu/Documents/ListOfAuthors-Publications\(4\)_db3.php#20](http://www.math-art.eu/Documents/ListOfAuthors-Publications(4)_db3.php#20).

Si, dans la présente conférence, le texte sur le monde spirale ne contient rien de véritablement neuf par rapport aux exposés précédents, celui sur les liens entre mathématiques et arts est plus abouti: sont davantage explicitées les raisons qui ont présidé au choix des œuvres illustrant ces différents liens.

Toutefois, en ce qui concerne le premier d'entre eux, intitulé la représentation, seul le texte de la conférence Florence, s'appuyant sur des données de philosophie naturelle, en donne une présentation relativement approfondie.

2. Compte tenu de la composition de l'auditoire attendu, la conférence souhaitait quelque peu familiariser son public avec un objet mathématique important, mais sans doute absent de la majorité des programmes scolaires. C'est la raison pour laquelle, par rapport aux précédents, l'exposé s'intéresse légèrement davantage à la notion de tore, présentée d'ailleurs sur un angle plus général que l'habituel.

L'illustration architecturale sous forme d'arène est simplement reprise par exemple de http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/bonneAnnee/Bonne_Année.pdf ou de <http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/patisserie/PM1-2-3-4.pdf>.

La célébrité de certaines arènes comme celle de Nîmes repose sur la présence occasionnelle principale de deux types d'animaux, deux mammifères : le taureau et l'homme. J'ai introduit pour la première fois, sans doute au cours du premier semestre de l'année 1980, la description de l'animal adulte en l'occurrence l'homme, en tant que tore \mathcal{T}_S^1 , obtenu par invagination de la boule \mathbf{D}^3 , censée représenter l'œuf originel. On trouve la trace écrite de cette description en page 47 d'un cours fait à l'époque à des élèves-instituteurs <http://arpam.free.fr/MPIE.pdf>.