

DES MATHÉMATIQUES ET DES ARTS

Conférence Suresnes
16 Mars 2017

Mesdames, Messieurs, Mesdemoiselles, Chers Collègues,

Je voudrais tout d'abord remercier Isabelle Aurier et le Comité d'Etablissement de Dassault Aviation pour leur généreuse invitation faite à l'ESMA, la Société Européenne pour les Mathématiques et les Arts, de présenter l'exposition d'une partie de son fonds d'œuvres.

Chaque œuvre est unique. Elle est l'expression du savoir, des connaissances, des aptitudes intellectuelles, de la sensibilité, des goûts de son auteur: en ce sens chaque œuvre, qu'elle relève de l'apparence abstraite ou non, est profondément imprégnée d'humanité.

Ces œuvres sont des représentations. La classification des représentations pose de redoutables défis. Il existe une classification des thèmes et articles mathématiques faite par les professionnels, elle a ses défauts. Il n'existe pas de véritable classification des œuvres d'art. Une manière de voir de départ pourrait par exemple consister à classer les œuvres selon qu'elles concernent l'inanimé ou l'animé, une distinction parfois difficile. Selon le point de vue adopté, on pourra ranger les œuvres telles que les pavages, les polyèdres, les surfaces comme la sphère, les natures mortes dans la catégorie inanimée, les œuvres qui représentent les trajectoires comme les cercles, les ellipses, les spirales, les nœuds, ou bien les chevaux en mouvement, pensons à Géricault et à Toulouse-Lautrec, dans la catégorie animée. Mais la sphère n'est-elle pas un ensemble continu de trajectoires circulaires, l'inanimé serait-il engendré par l'animé ?

Les thèmes mathématiques de l'exposition sont très variés. On rencontre entre autres des univers fractals, des pavages appartenant au monde euclidien ou hyperbolique, des nœuds, des surfaces de toute nature, algébriques, minimales, orientables ou non, de courbure positive ou non, avec ou sans singularité. Le contenu

de cette exposition étant alors trop riche tant sur le plan artistique que mathématique pour pouvoir en faire rapidement un inventaire détaillé et une présentation consistante, après un bref rappel illustré sur quelques qualités que partagent tous les artistes, je dirai un mot sur la raison d'être et les objectifs de l'ESMA, donnerai ensuite quelques exemples abrégés de réalisations intellectuelles et matérielles conformes à ces objectifs.

Convenons d'abord d'appeler « art »¹ toute activité humaine d'excellence et exemplaire en un domaine particulier, et artiste celui qui pratique une telle activité. De par la réputation des sociétés Dassault, je m'adresse donc ici à des artistes scientifiques reconnus, en toute humilité.

Cette conférence a pour titre « Des Mathématiques et Des Arts ». Un titre que l'on pourra considérer comme ambigu: l'article indéfini « Des » peut en effet prendre deux significations, le sens de « à propos de », ou bien celui de la désignation d'une globalité. Cette pluralité de sens peut toutefois être un atout pour la richesse de la discussion.

On peut par exemple s'interroger: tous les arts sont-ils concernés par toutes les mathématiques ? Ainsi, l'art de concevoir des avions, ou celui de les fabriquer, ou celui de les conduire, porte-t-il sur toutes les mathématiques, de manière directe, évidente, ou cachée et détournée ? Peut-être les avis sur ces questions sont-ils partagés.

J'ai proposé dans des conférences précédentes une liste de qualités que, semble-t-il, partagent tous les artistes de toute discipline, me restreignant de manière naturelle à ceux d'entre eux qui sont mathématiciens ou pratiquent les arts visuels. Cette liste se limite à six points communs, mais peut-être en y a-t-il d'autres². A ces six points, on peut donner les noms de **Représentation**, de **Perfection**, d'**Inventivité**, de **Singularité**, d'**Universalité**, et de **Phénomènes ondulatoires**.

Pardonnez-moi, pour des raisons de nécessité temporelle, de ne pas commenter ces six points. On pourra prendre connaissance de tels premiers commentaires dans un article paru dans la jeune revue *Scripta Philosophiae Naturalis* [6]. Je vais

¹ L'expérience acquise auprès de la pratique des mathématiques invite à rechercher les définitions dotées du caractère de la plus grande universalité. Elles se révèlent être non seulement de formulation assez simple mais aussi les plus pertinentes.

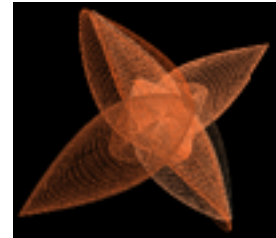
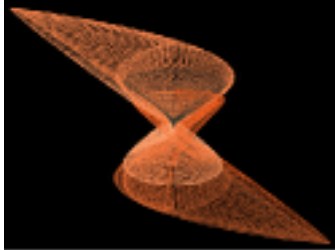
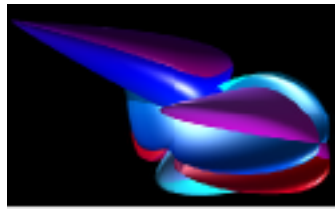
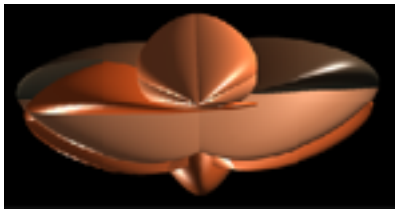
² Par exemple « Création » ne figure pas dans cette liste. Ce terme est utilisé en deux sens: celui de nouveauté, d'un objet (matériel ou intellectuel) dont la présence n'était pas auparavant apparente dans l'environnement spatio-temporel de son auteur, et celui du processus qui conduit à la naissance de cette nouveauté. Toute création est-elle artistique ?

simplement faire défiler rapidement des images empruntées à ce texte, et qui illustrent ces points.

Dans l'article précité, apparaît une définition quelque peu abrupte du beau: ce qui, par effet de résonance et au contraire du laid, contribue à fortifier notre propre stabilité spatio-temporelle. Ne sont pas abordées les distinctions entre les formes multiples de la beauté, entre ses degrés auxquels correspond parfois le terme modeste de joli, tout ceci étant lié en grande partie à des niveaux différents de réalisation, de stabilité et d'instabilité de phénomènes divers, également culturels comme les effets de mode. Peut-être tentera-t-on d'évaluer la pertinence subjective de cette conception synthétique du beau en s'attardant sur les œuvres de l'exposition.

Ces œuvres, où la symétrie, liée à la stabilité, est omniprésente, sont extraites du fonds de l'ESMA qui en possède plus de 130. Toutes prêtées ou données par leur auteur, elles sont le fruit du travail d'une bonne trentaine de personnes, une quinzaine environ d'artistes proprement dit, une quinzaine environ de mathématiciens et d'informaticiens, de nationalité européenne y compris russe, ou américaine, du nord comme du sud. Le support mathématique des œuvres réalisées par les mathématiciens et informaticiens ou par les artistes travaillant avec ces derniers est non seulement rigoureux, mais sauf exception très actuel. Comme il s'agit d'art visuel, la géométrie et la topologie sont dominantes, et le but de tous les éventuels calculs.

La majorité des œuvres furent créées à l'aide de logiciels adéquats. Ceux de Dassault Système n'ont apparemment pas encore été utilisés au sein de l'ESMA. Mais peut-être cette situation n'est-elle que provisoire. Sauf Fomenko qui, de manière directe, n'emploie que la plume chargée d'encre noire, les autres mathématiciens importants, comme Banchoff, Field et Sullivan écrivent entièrement leurs programmes. Il en est de même pour les informaticiens Colonna, De Comite ou Leys. Les principaux sites que les artistes comme Bénard, Constant ou Jeener, ont consulté pour y trouver des éléments d'inspiration, mais aussi pour leur qualité mathématique, artistique et pour leur richesse en programmes, sont, outre ceux de Wolfram <http://mathworld.wolfram.com/> ou de Mathlab <https://fr.mathworks.com>, le site de l'australien Paul Bourke [3],



P. Bourke. Fano planes

celui, exemplaire, de l'important mathématicien américain Richard Palais [18] - personne n'a fait mieux que lui sur la mathématique des solitons, entre autres.

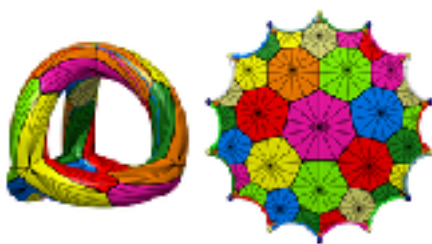
Virtual Math Museum Enter



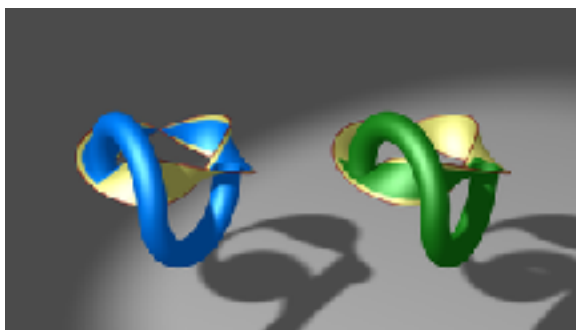
[Supporting Software used on this site](#)
[References](#)
 footer begin

[3D-XplorMath home page](#)

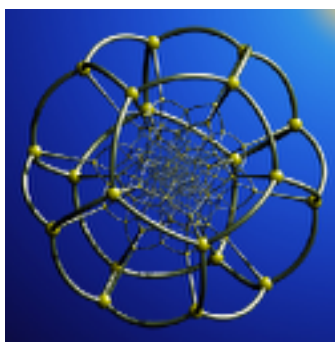
Un autre site, intéressant du point de vue mathématique, mais ne donnant pas les programmes de visualisation des objets mathématiques qu'il contient, est celui du français Robert Férreol [14]. Le dernier site, celui de l'anversois Jos Leys [16],



J. Leys. Seconde quartique de Klein



Deux sommes connexes homéomorphes

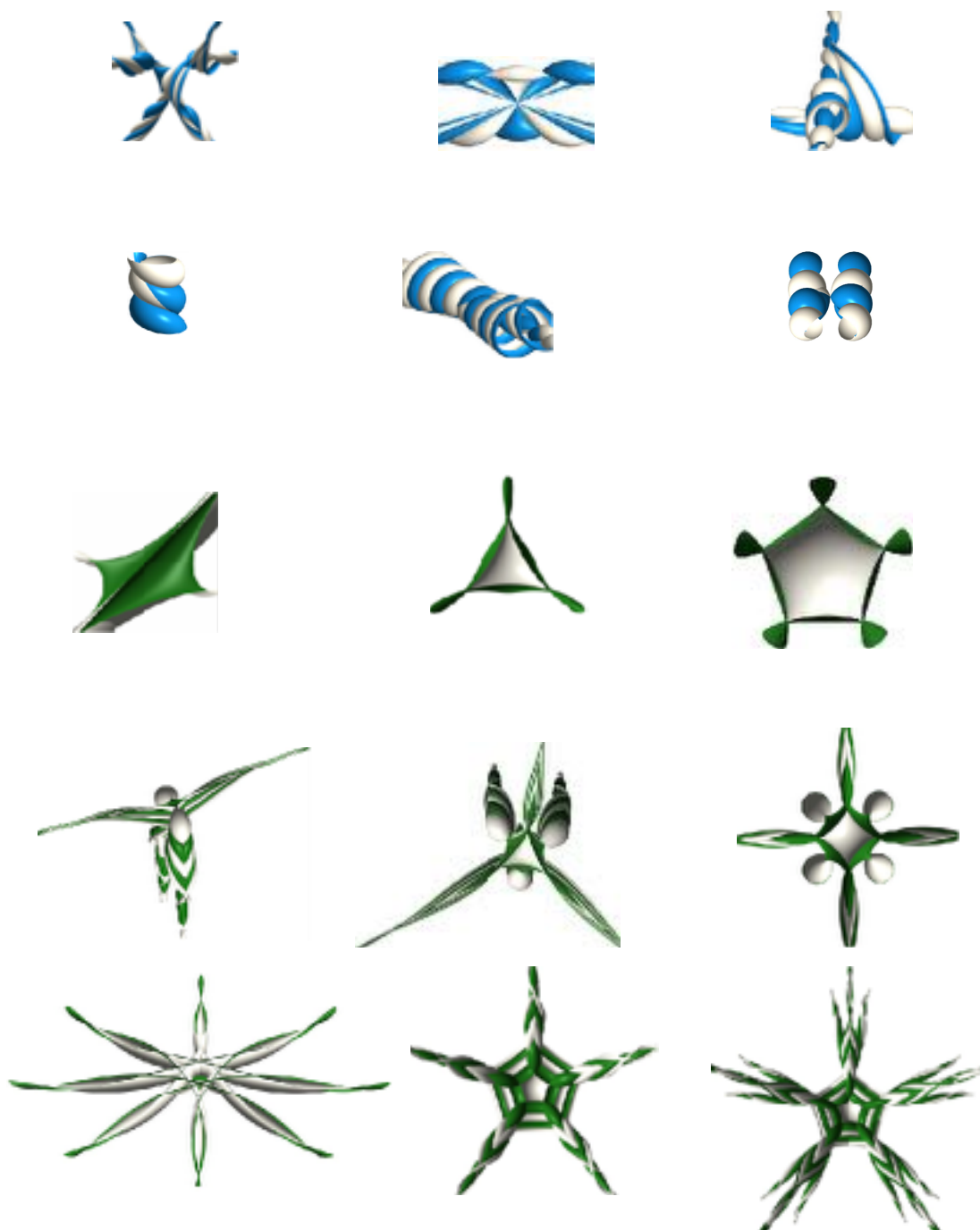


J. Leys 120-cell

principalement consacré aux avancées les plus récentes de la topologie, brille, tant par la qualité artistique de très nombreuses images et animations, que par celle des explications données pour connaître et comprendre leur contenu mathématique, et pour la mise en œuvre de leur construction.

Ces œuvres, en tant qu'outils pédagogiques, répondent parfaitement aux objectifs de l'ESMA, indiqués dans la feuille [1] qui accompagne le très succinct

catalogue de l'exposition: en premier lieu, faire tomber les barrières psychologiques qui séparent les publics des mathématiques, montrer la richesse inattendue³



David Brander. Exemples de surfaces sphériques (courbure totale positive constante)

et la beauté de l'univers des objets mathématiques, initier, pas davantage, à la connaissance de ces objets, de concepts et de quelques faits mathématiques importants, significatifs, et qui participent à la formation du jugement.

³ pour le grand public. L'ensemble de ces objets a évidemment au moins la même puissance que celui de l'ensemble des entiers.

Par ailleurs, contribuer au développement des mathématiques elles-mêmes, à travers l'examen du contenu mathématique que recèlent de manière évidente ou cachée ces œuvres d'art, voire à partir des suggestions faites par des artistes eux-mêmes, est également l'un des objectifs de l'ESMA.

Enfin, apporter aux artistes, en reconnaissance, la maîtrise de procédés mathématiques qui pourraient leur permettre de créer des œuvres originales est bien sûr l'un de ses devoirs.

En résumé, l'ESMA est le support d'un projet pédagogique qui vise à attirer les publics vers les mathématiques, quand une pédagogie mal conçue, tant par sa forme que par son contenu, pourrait les en détourner. Ce projet a ses limites car il n'est pour l'instant qu'incitatif, incitatif à la curiosité intellectuelle, à la pratique du raisonnement, à la recherche des causes, à la recherche de l'explication, et donc à la formation du citoyen réfléchi et avisé. Il serait plus complet s'il pouvait inclure davantage l'exercice effectif de la démonstration, qui est la recherche des causes et l'obtention de l'explication. La conjecture, l'affirmation gratuite, le slogan ne sont pas tenus pour des vérités pour celui qui pratique la mathématique. Mais ils sont source de réflexion.

Quelques aperçus de réalisations effectuées dans l'optique de ce projet.

Premier exemple: les cônes.

Le texte [3] qui accompagne le second bandeau du site l'ESMA [11] mentionne l'invitation que Paul Cézanne adressait en 1904 à la communauté artistique:

« Traitez la nature par le cylindre, la sphère, le cône, le tout mis en perspective, soit que chaque côté d'un objet, d'un plan, se dirige vers un point central ».

Un programme donc basé sur les mathématiques, comme l'exigeait également le grand Léonard. Les mathématiciens ont pleinement étudié les sphères que mentionne Cézanne. Ces sphères dûment remplies leur servent de briques fondamentales dans nombre de leurs constructions, dans la mise en place de domaines d'approximation. Mais quid des cônes et des cylindres, lesquels ne sont que des cônes dont les sommets se situent quelque part à l'infini ? En dehors des travaux des grecs de l'antiquité, Apollonius en particulier, les mathématiciens modernes ne se sont guère intéressés à ces objets en soi. Ils font pourtant partie d'une famille très riche et importante que sont les espaces fibrés porteurs de singularités, isolées ou non, dont la théorie est très incomplète; j'ai appelé ces espaces de manière générale des

« montagnes », et, dans un sens plus général que le sens ordinaire, des cônes lorsque les singularités sont isolées. Ces espaces sont ici connexes, ne sont donc pas des représentations d'aérosols, de nuages de particules. Par exemple, évidemment le nez des avions, les pales de nombreuses hélices, sont des cônes au sens précédent. Par des procédés adéquats, on peut décomposer en de tels cônes n'importe quel objet consistant, y compris, par un feuilletage, une aile d'avion. Inversement, différents modes d'assemblage de ces cônes peuvent permettre de créer des objets parfois nouveaux [7]. L'algèbre de ces assemblages divers n'a pas été encore formalisée.

Second exemple: la non-convexité.

La plupart des objets sont non convexes. Le domaine occupé par un avion est-il convexe ? Non bien sûr. La plupart des objets décoratifs également ne sont pas convexes. L'examen de ces objets courants suggère alors de préciser la notion de non-convexité, et de définir des invariants topologiques spécifiques de cette propriété [8]. Voici par exemple ces feuilles de houx:



ou ce portrait humoristique:



A smiling (2,6)-motive

qui présentent des parties convexes associés à des sommets dits elliptiques et d'autres non convexes associés à des sommets hyperboliques.

On peut déformer ce portrait de manière continue en ce polygone non

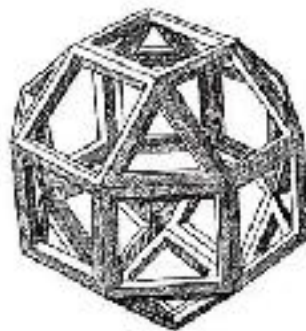


A (2,6)-motive: the « butterfly »

convexe dit linéaire parce que les arcs joignant les sommets sont définis par des applications linéaires. Dans le langage des mathématiciens, on dit que ces deux motifs sont topologiquement équivalents. L'idée générale est de ramener l'étude de presque tout objet à celle de polytopes qui peuvent lui être associés. On voit alors apparaître des symétries formelles: il se peut que certaines d'entre elles correspondent à des symétries fonctionnelles plus ou moins cachées de l'objet source.

Troisième exemple: les nœuds.

C'est en partie de par leurs belles propriétés de symétrie apparente que cristaux et polyèdres linéaires sont appréciés comme objets esthétiques. Depuis les constructeurs de pyramides, en passant par Platon et Da Vinci [17], ils n'ont cessé d'attirer l'attention des artistes de différentes corporations. Les bords de ces polyèdres pleins, on disait solides au seizième siècle, les Anglo-Saxons utilisent encore ce qualificatif, ces bords donc sont des polyèdres creux ou encore évidés que l'on reconstitue à partir de leurs sommets et de leurs arêtes, comme le faisait Da Vinci de manière rigide,



Da Vinci. Rhombicuboctaèdre

ou comme le fait aujourd'hui le belge Xavier De Clippeleir [14] de manière cinétique, transformable:



De Clippeleir. Dodécaèdre transformable

On peut compléter l'étude des polyèdres par la prise en considération supplémentaire de leurs arêtes intérieures, c'est-à-dire des portions de courbes joignant les sommets et situées à l'intérieur des polyèdres pleins.

Une portion de courbe dont on soude, identifie les extrémités est alors appelée un nœud. Le cercle, et toute bonne déformation du cercle comme par exemple le polygone formant le bord d'une face d'un polyèdre, est appelé un nœud trivial.

Le problème suivant est ouvert: un polyèdre étant donné, décrire l'ensemble des nœuds que l'on peut fabriquer à partir de ses arêtes intérieures et des arêtes de son bord⁴ ? On peut imaginer qu'un tel nœud est la trajectoire d'un électron dans une sorte de cristal de Wigner.

Le nœud le plus simple après le nœud trivial est le nœud à trois feuilles ou nœud de trèfle. Un tel nœud est par exemple le bord d'un ruban de type Möbius fabriqué à partir d'un simple ruban droit vrillé trois fois et dont on soudé les bords opposés à la direction du vrillage:



John Robinson. Immortality⁵

Voici une représentation matérielle et déformable d'un tel nœud de trèfle qu'on dit être torique car il peut s'enrouler sur un tore standard.

⁴ On peut largement généraliser ce problème en toute dimension. En s'en tenant à la simple dimension 3, il s'agira de reconnaître et de dénombrer les différents nœuds présents dans les assemblages de polyèdres ayant des faces communes: ces nœuds seront appelés des 1-nœuds. Un château de trois cartes formant par projection de face un triangle (lequel est un 1-nœud trivial) sera appelé un 2-nœud trivial. On pourra alors étendre eux 2-nœuds la problématique posée par les 1-nœuds.

⁵ Cette réplique d'Immortality est la propriété de l'Université de Bangor au Pays de Galles. Son image est également devenu le logo de la School of Mathematics de cette Université.

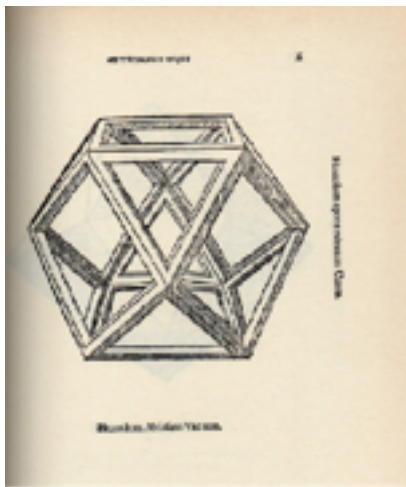
<http://www.popmath.org.uk/centre/index/htm>



P. Rips. Nœud de de trèfle

Ce nœud possède ici un axe de symétrie, disons vertical. Les fils de tension supérieurs et inférieurs sont respectivement situés dans deux plans horizontaux tangents aux feuilles du nœud. La distance entre ces deux plans est un paramètre important. On peut déformer le nœud jusqu'à rendre cette distance nulle: les trois feuilles se rencontrent alors en un point singulier.

Le jeu des arêtes extérieures et intérieures d'un cuboctaèdre



Da Vinci. Cuboctaèdre



Cuboctaèdre Viking

révèle la présence de quatre nœuds de trèfle.

L'ensemble de ces quatre nœuds a donc quatre fois trois soit douze feuilles, autant de feuilles que le nombre d'étoiles couleur or du drapeau européen dont le fond est bleu. D'où le logo de l'ESMA, fabriqué à partir de quatre nœuds de trèfle, alternativement or et bleu.



Il est une autre manière, physique, de présenter ces quatre nœuds de trèfle. Elle s'inscrit dans un mouvement artistique assez récent, il s'est lentement développé à partir des années 20, avec les premières constructions de Karl Ioganson à Moscou. Les artistes appartenant à ce mouvement construisent des structures, des assemblages d'éléments rigides ou souples formant des complexes en équilibre de forces de compression et de forces de tension. La théorie associée à la réalisation de tels assemblages est appelée la théorie de la tenségrité (tensional integrity). C'est dans ce cadre que Philippe Rips a réalisé le nœud de trèfle métallique précédent et cet assemblage des quatre nœuds de trèfle:



**Bruter-Rips. Représentation symbolique
de la surface Boy**



Le repos de Boy

Il résiste à tout tremblement de terre et même à l'aplatissement.

L'assemblage fondamental reconnu par le sculpteur américain Kenneth Snelson en 1960 est le module représenté sur la figure suivante, associée à l'architecture du cerf-volant:



Les trois élastiques participent à la tension alors que les trois barres⁶ participent à la compression.

Une présentation à la fois élégante et éthérée du module fondamental, elle a été primée au salon 2016 des Réalités Nouvelles, a été réalisée par Philippe Rips:



Philippe Rips. Tribute to Cuthbert

On peut, dans le dispositif précédent, réduire la taille de la barre verticale jusqu'à la valeur nulle. On obtient alors un contact de compression locale entre les deux barres transversales. Les fils de tension tendent à courber les barres: l'introduction d'une courbure locale est équivalente à l'introduction d'une tension locale.

L'architecte russe Dmitri Kozlov [15] a utilisé ces faits pour fabriquer des structures stables mais déformables de surfaces bi-dimensionnelles, a priori de genre quelconque. Ces structures ont le dessin de nœuds auto-transverses, où un point de croisement dessus-dessous est immédiatement suivi d'un point de croisement dessous-dessus.



D. Kozlov. Nœud magique

⁶Ces trois barres définissent deux plans en position transverse dans l'espace usuel. De manière générale, les sous-espaces des x appartenant à $\mathbf{R}^p$ et des y appartenant à $\mathbf{R}^{n-p}$, situés en position transverse dans $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$ définissent un repère minimal. Tout z de $\mathbf{R}^n$ est alors bien défini par ses projections x sur $\mathbf{R}^p$ et y sur $\mathbf{R}^{n-p}$: $z = (x, y)$. Cette remarque triviale pourrait faciliter ou susciter une étude détaillée de quelques problèmes en utilisant une procédure récursive d'analyse, ou bien en mettant en évidence des conflits ou au contraire des complémentarités entre acteurs X et Y représentés respectivement par des x et y bien choisis.

Il est facile de montrer que toute surface peut être représentée au moins partiellement par de tels nœuds auto-transverses.⁷

L'étude physique, mécanique précise de telles structures ne semble pas avoir été faite. Comment résistent-elles à des chocs, à des vibrations, à quelles tailles et directions de projectiles ?

Je terminerai cet exposé par la présentation succincte d'un projet dont l'existence a été à l'origine de la création de deux associations l'ARPAM d'une part et sa fille l'ESMA d'autre part. Ce projet est celui de la de création d'un parc de promenades et d'activités mathématiques (projet ARPAM [2], [12]) qui ne manquerait pas d'attirer les publics par son originalité et sa valeur artistique. Le parc a failli par deux fois voir le jour en France sous les présidences de Mitterrand et de Chirac. Il bénéficiait à son origine de l'appui de la Société Mathématique de France et d'un comité d'honneur de mathématiciens internationaux présidé par L.Schwartz. Nos collègues grecs ont souhaité un moment le réaliser, mais chacun connaît la situation économique de la Grèce. A défaut d'apparaître à l'Ouest, peut-être (?) se fera-t-il avec l'appui des aviateurs, notamment celui du conseiller scientifique d'Airbus que je remercie à nouveau ici, près de Moscou, dans la zone portuaire qui englobe l'aérodrome Zhukovsky.

Il s'agit, au sein d'un beau domaine, d'une sorte de lumineux musée éclaté des mathématiques sous la forme de 10 petits bâtiments, largement entourés de verdure et appelés des folies en termes architecturaux. Chaque folie, conçue et décorée par des mathématiciens, illustre un chapitre important de la discipline. On trouvera leur

⁷ On n'entrera pas ici dans tous les détails de la démonstration. Il est évident qu'on peut feuilleter toute surface à l'aide de deux familles de courbes (dont certaines sont singulières) en position transverse: ce sont par exemple les intersections de la surface avec deux familles de plans topologiques en position transverse et feuilletant l'espace usuel. Les impressions en 3D de Francesco De Comitè, comme par exemple celle de ses cyclides de Dupin, mettent en évidence de telles courbes.



F. De Comitè. Élément d'une cyclide de Dupin

Dans nombre de cas usuels, ces courbes en position transverse sont des géodésiques, également des nœuds triviaux: l'exemple le plus simple qui se généralise sans difficulté est celui de la sphère sur laquelle on établit deux familles finies de cercles parallèles à deux plans orthogonaux, on peut ensuite déformer cette sphère en n'importe quelle surface connexe de même genre, comme par exemple un polytope ou un avion. On peut ensuite couper chacun des nœuds triviaux et les raccorder pour aboutir à un seul nœud auto-transverse. Un coup de bistouri sur une telle surface sans bord engendre une surface à bord. Pour obtenir une surface de genre supérieur, disons 1, comme par exemple un tore, on déforme la sphère en un saucisson, on élimine les extrémités et on raccorde les deux bouts.

description sur les sites de l'ARPAM et de l'ESMA. Des premières visualisations de quelques-unes des folies ont été faites [13], trois d'entre elles par Dmitri Kozlov.

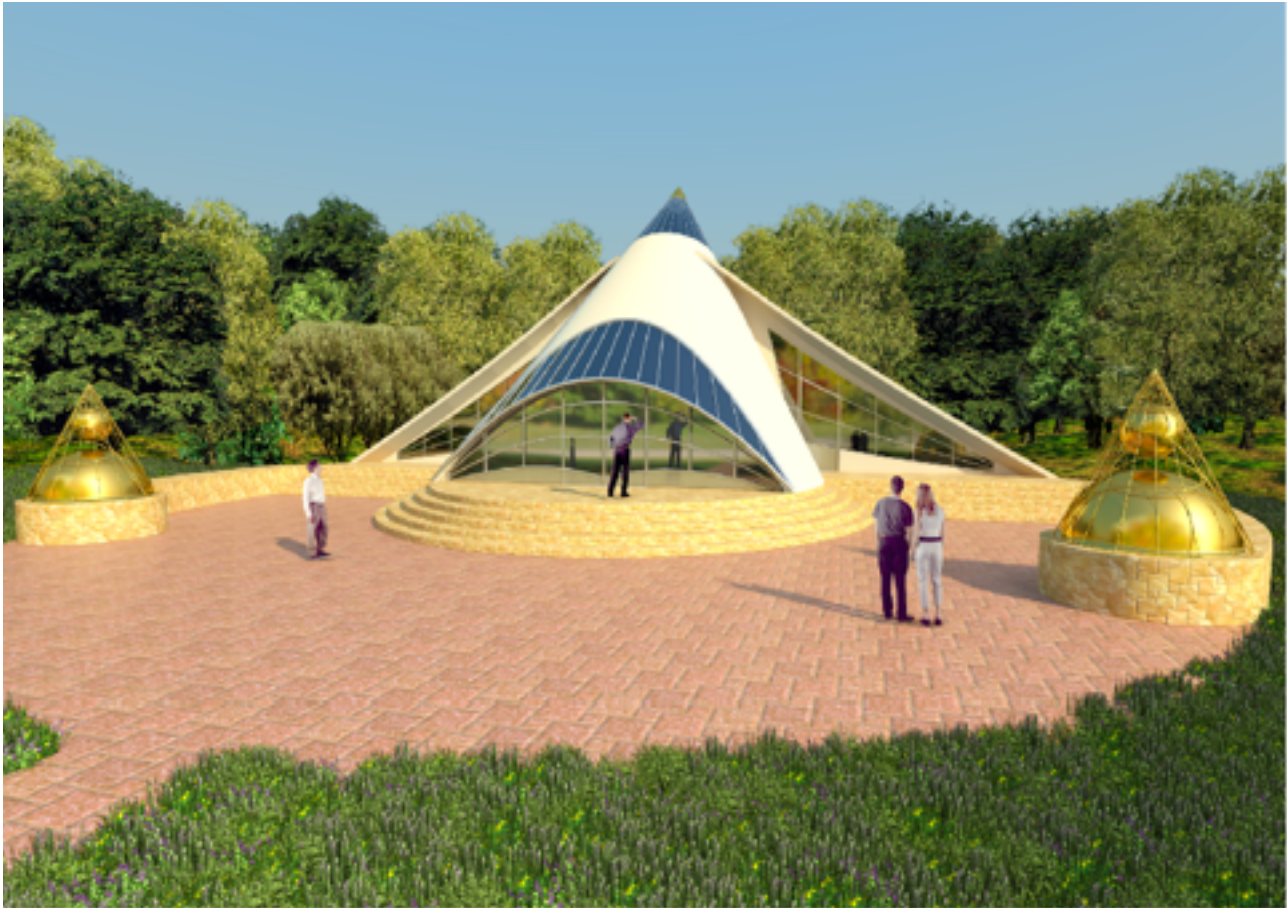
Voici à titre d'exemple les aperçus, sans les éclairages, de trois folies, d'abord le « Septième Temple » consacré à la théorie des groupes - on reconnaît la présence sur la toiture, normalement un vitrail, d'un pavage hyperbolique de Klein, puis, sur les murs extérieurs, une illustration amovible des 17 familles de groupes de pavages du plan euclidien, et, sur les sept murs intérieurs, 7 est le nombre de familles de groupes de frises, le nom de sept grands mathématiciens qui ont contribué dans le passé à l'élaboration de la théorie .



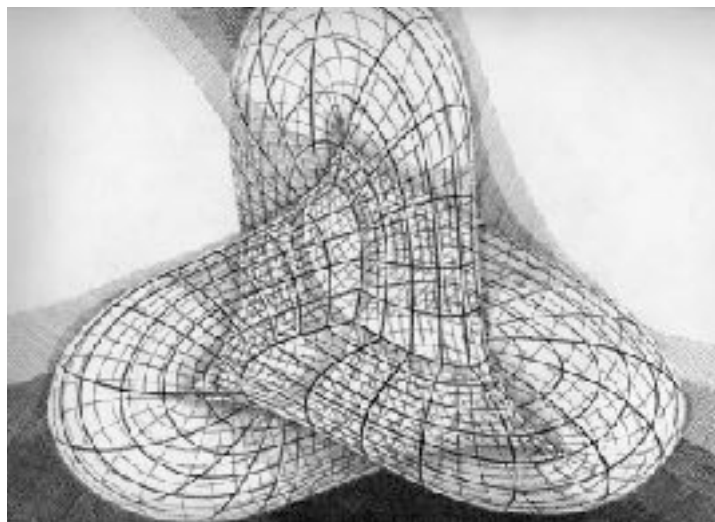
Vient ensuite le « Parapluie de Whiney » consacré à la géométrie algébrique et à la théorie des singularités - au centre n'apparaît pas encore le manche vertical du parapluie, il permettra l'éclairage de la folie. De part et d'autre du manche virtuel, deux éléments symétriques du parapluie. Les excroissances extérieures sont des éléments de surface appelées queues d'aronde. Parapluie et queue d'aronde sont des surfaces réglées.



Le troisième aperçu est celui de la « Coiffe d'Apollonius » consacrée aux quadriques et à la géométrie analytique- un cône standard adossé à un élément de parabolôïde, autres surfaces réglées.



Une présentation brève de la folie consacrée à la topologie, la Surface (ou la « Brioche de Boy »). Cette surface est une représentation, comme celle-ci sous forme de gravure, de l'espace projectif de dimension 2 dans l'espace ordinaire.



P. Jeener. Surface de Boy

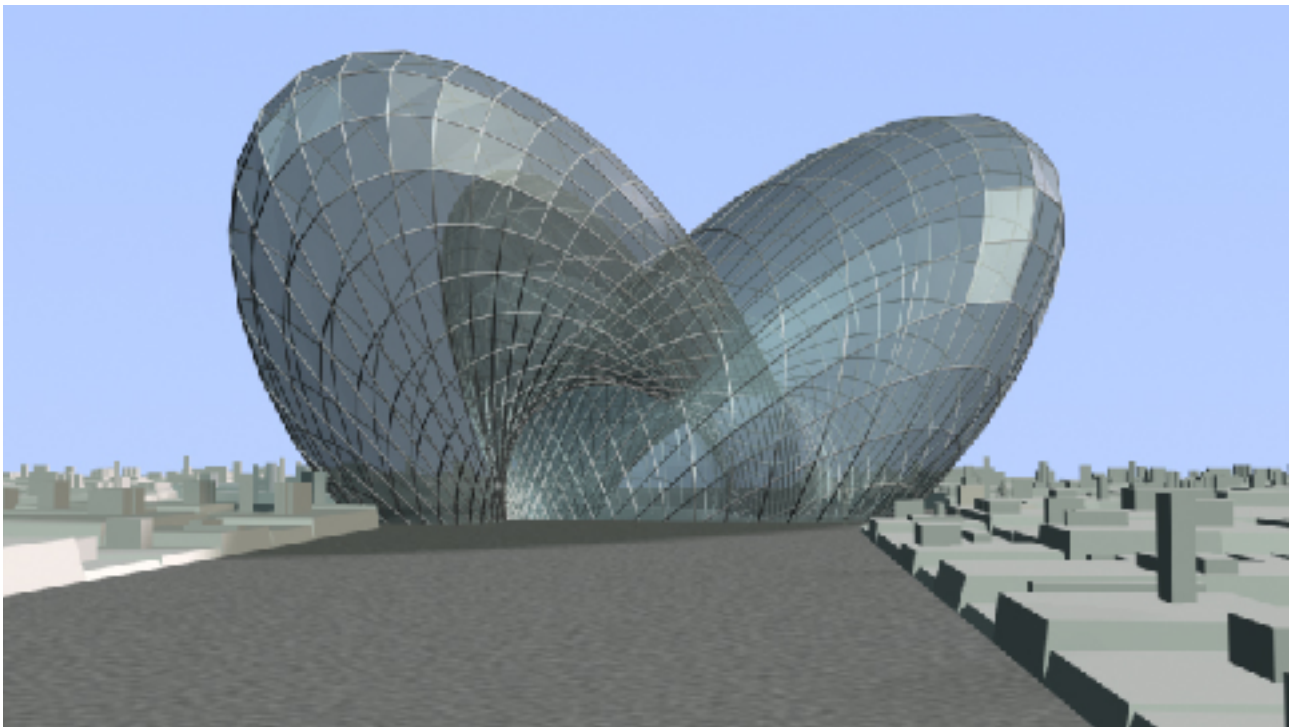
Plusieurs youtube en montrent des visualisations animées différentes, chacune instructive sur la manière de construire une surface de Boy. (cf https://www.google.fr/search?client=safari&rls=en&q=surface+de+Boy+youtube&ie=UTF-8&oe=UTF-8&gfe_rd=cr&ei=WFm1WOCVHYaC1gLcmYvYAAQ).

Sur ce modèle métallique de François Apéry, l'on voit parfaitement les deux familles de cercles topologiques en position transverse, ici des ellipses.



François Apéry Surface de Boy en ellipses

C'est à partir de la visualisation architecturale de ce modèle que serait bâtie la folie dédiée à la topologie.



Parc de Promenade et d'Activités Mathématiques

Claude Paul Bruter

Surface de Boy

Références

- [1] AFFICHE (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Flyer_F.pdf , http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Flyer_EN.pdf)
- [2] ARPAM <http://arpam.free.fr>
- [3] BANDEAU ESMA <http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/banner2.pdf>
- [4] P. BOURKE <http://paulbourke.net>
- [5] D. BRANDER Spherical Surfaces, arXiv:1506.01605v3[math.DG] 17 Nov 2015.
- [6] C.P. BRUTER *Mathématiques et Arts, Deux Conférences, Première Partie*, Scripta Philosophiae Naturalis, 11 Janvier 2017, 1-27 (<http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/claude-p-bruter-mathc3a9matiques-et-arts-deux-confc3a9rences1.pdf>).
- [7] C.P. BRUTER *Mathematics for the working artist*, Part II, *An Introduction to the qualitative theory of cones*, Mathematics and Art III (C. P. Bruter Ed.) Cassini 2015, 139-168 (<http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Cagliari2013/mathematics-working-artist.pdf>).
- [8] C.P. BRUTER *Merveilles siciliennes, Regards sur le mode de construction des frises*, A paraître (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Ljubljana2016/Ljubljana_2.pdf).
- [9] C.P. BRUTER Catalogue ESMA 2013 (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Catalogue_2013.pdf)
- [10] X. DE CLIPPELEIR *Kinetische Sculpturen* (Catalogue), Bibliotheek Harelbeke, 2014.
- [11] ESMA <http://www.math-art.eu>.
- [12] ESMA *The Arpam project* (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/THE_ARPAM_PROJECT.pdf).

- [13] ESMA *Visualization of the first folies* (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/ARPAM_Visualisation_Folies-002.pdf).
- [14] R. FÉRREOL <http://www.mathcurve.com>
- [15] D. KOZLOV *Kinetic structures of cyclic knots and links as further development of tensegrity principle*, Procedia Engineering 165 (2016)1897-1902 (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Dmitri_Kozlov_Kinetic%20structures-2016.pdf).
- [16] J. LEYS <http://www.josleys.com>
- [17] L. PACIOLI DI BORGO *Divine Proportion*, Librairie du Compagnonnage, Paris 1988.
- [18] R. PALAIS <http://3d-xplormath.org>