

*SUR L'INCARNATION DES
OBJETS MATHÉMATIQUES
AU SEIN DE
L'ART VISUEL*

Claude P. BRUTER¹

INTRODUCTION

Je voudrais tout d'abord adresser mes chaleureux remerciements à l'Association des Amis de l'IHES et à son président Valentin Poenaru pour cette invitation, me permettant de venir avec vous découvrir des œuvres curieuses et lumineuses **2** qui seraient exposées, paraît-il, dans un musée original consacré aux mathématiques.**3**

La visite sera précédée par la présentation de quelques considérations générales et très introductives sur l'origine première des mathématiques. Les œuvres que nous verrons ensuite sont, pour la plupart d'entre elles, extraites d'un fonds de près de 130 œuvres, fruits du labour d'une quarantaine de mathématiciens, informaticiens, peintres, dans leur grande majorité européens, l'Europe actuelle qui s'étend depuis la Roumanie au sud-est jusqu'à la Norvège au nord-ouest.

Tous ces auteurs furent réunis en cette association, l'ESMA,⁴ www.math-art.eu. Son site, très riche, contient plusieurs catalogues parfois incomplet comme par exemple celui-ci : http://www.math-art.eu/Exhibitions/Mairie_V_2020/Catalogue_2020_opt.pdf.

On pourra découvrir dans ces catalogues bien des œuvres, qu'à mon grand regret, je n'ai pas la possibilité de montrer aujourd'hui, et ainsi faire connaissance avec leurs auteurs; je les salue ici, leur fais part de mon amitié, et de mon admiration pour le travail remarquable, mathématique, informatique et artistique, qu'ils ont accompli.

¹ Texte de la Conférence donnée devant l'Association des Amis de l'IHES, le 17 Février 2022

GÉNÉRALITÉS INTRODUCTIVES

6 L'exposé s'articule autour de deux notions centrales: celle de REPRÉSENTATION qui se rapporte à la fabrication locale du corpus mathématique, celle d'ÉVOLUTION dont on indiquera brièvement en fin d'exposé deux modalités.

Une des activités premières de l'être vivant est de fabriquer des représentations de son environnement afin de préserver sa stabilité spatio-temporelle. 7 La problématique de la représentation dans tous ses aspects, physiques et intellectuels, est immense et passionnante. On ne s'étonnera pas alors que, pour un mathématicien, soient importantes outre la donnée d'un objet, celle de ses représentations, ces images symboliques ou matérielles que l'on peut faire de l'objet à l'aide d'une panoplie d'appareils photographiques et d'outils divers.² 9 Ce couple, l'objet et une famille de ses représentations, sera appelé ici une catégorie.

Nous allons nous intéresser à une catégorie particulière notée ainsi **10.1**

$\mathcal{E}(\mathfrak{M}) : (\mathfrak{M}, \mathcal{R}_{AV}(\mathfrak{M}))$ \mathfrak{M} , qu'à l'occasion j'appellerai aussi, de manière très imparfaite et par commodité, un immeuble, désigne l'ensemble de ces objets mentaux appelés objets mathématiques. $\mathcal{R}_{AV}(\mathfrak{M})$ dénote la famille de leurs représentations incarnées dans le domaine des Arts visuels.

Un exemple de représentation incarnée ? Celle-ci, que nous a aimablement prêtée l'IHES et que je remercie: **10.2**

Un autre exemple rapide est cette image pleine d'humour. **11**

Un mot sur \mathfrak{M} . Cet ensemble \mathfrak{M} des objets mathématiques est lui-même un grand objet en évolution, de sorte qu'il convient d'écrire non point \mathfrak{M} , mais \mathfrak{M}_t . \mathfrak{M}_t désigne la section de l'immeuble construit jusqu'à la date t . L'évolution de \mathfrak{M}_t est très complexe, elle est sous la coupe de quatre facteurs principaux : **12**

1 L'observation et la reconnaissance jusqu'à la date t des propriétés P_t et des faits F_t de l'environnement dans tous ses aspects (activité qui, travers nos capacités naturelles de sensation, relève de la physique expérimentale), engendrant :

2 La mise en forme, à l'aide d'un jeu de symboles, d'un jeu de représentations (modèles) $\mathcal{R}(P, F)_t$ de ces propriétés et faits jusqu'à la date t . Il constitue la strate génératrice $\mathfrak{M}_{g,t}$ de \mathfrak{M}_t .

²Les plus pertinentes de ces représentations sont celles qui révèlent le plus fidèlement possible les propriétés caractéristiques de l'existence et donc de la stabilité de l'objet, par conséquent notamment ses propriétés de symétrie.

3 L'observation, confirmée par l'explication (i.e. la (dé)monstration) et l'analyse du contenu et des propriétés de cette strate génératrice $\mathfrak{M}_{g,t} = \mathcal{R}(P,F)_t$ conduisant à la création de nouvelles entités, et de nouveaux jeux de représentation de ces entités.

4 Les progrès accomplis dans la représentation des objets mathématiques, à travers notamment la création de nouveaux outils de représentation, intellectuels, mais aussi physiques³.

13 Selon ce schéma, et ce point est essentiel le contenu original de l'immeuble \mathfrak{M} abritant les objets mathématiques provient originellement de l'observation du monde physique, de ce que l'on voit (« nihil est in intellectu quin [quod non] prius fuerit in sensu »), sensu extérieur, sensu intérieur. Ce qu'on voit donc, plus ou moins immédiatement, de manière plus ou moins simultanée, et à l'aide du sensu extérieur, sont :

la forme, la diversité, le mouvement.

Par ailleurs, pour être vu, un paysage doit être éclairé **14**: ce fait évident souligne l'importance, la primauté du rôle de la lumière, des rayons lumineux, dans la construction, entre autres, de l'édifice mathématique.

Un bref commentaire sur les trois tableaux associés à ces caractères, forme, diversité, mouvement, et sur leur auteurs:

16 L'image que nous voyons n'est pas une photographie. C'est un fractal non déterministe dans le langage de Colonna, grand informaticien à l'Ecole polytechnique. Son site imposant, où le monde fractal est très présent, couvre la visualisation de nombreux chapitres importants de la physique et des mathématiques.

17 Patrice Jeener, ancien élève des beaux-arts, est un graveur, peut-être l'un des derniers à pratiquer cet art. Il fut séduit dans sa jeunesse par la forme des objets mathématiques sculptés qu'il découvrit au Palais de la Découverte. L'œuvre poétique que nous voyons relève de la théorie des formes souples qu'on appelle la topologie⁴. L'œuvre de Jeener, des centaines de gravures, dont plusieurs bien sûr dédiées aux objets topologiques, couvre la théorie des formes rigides ou géométrie, les polyèdres, les surfaces algébriques définies par des équations polynomiales, les surfaces dites minimales, très présentes au sein des morphologies physiques et biologiques.

18 Jos Leys est anversois, il m'a apporté un jour de la liqueur d'Anvers, une liqueur verte, très écologique, elle ne dépasse pas les 70°, je vous la recommande. Il est l'auteur d'une œuvre de visualisation très connue et très appréciée tant par son contenu mathématique que par ses qualités esthétiques. La création de cette image

³ Du travail pour les historiens...

⁴ Nous sommes, tout comme les autres animaux essentiellement déformables, et nous relevons donc de cette mathématique.

provient d'une étude appartenant à la grande famille des travaux portant sur le mouvement des fluides, liquides comme gazeux (chaleur), grande famille qui a contribué à donner son essor à ce grand chapitre des mathématiques appelé l'analyse. Ici l'étude est celle du mouvement de convection d'une couche d'air dans notre atmosphère. Edward Lorenz (1963) en a fait une première représentation à l'aide d'un système de trois équations différentielles assez simples (linéaire pour la première, quadratiques pour les deux autres). Leur traduction sur ordinateur a fait apparaître un ensemble assez célèbre de trajectoires **19** apparemment chaotiques. L'étude fine de cette famille de trajectoires à travers une autre cascade de représentations a abouti à la création de l'image **18**. En rouge est ce qu'on appelle un nœud de trèfle, comme celui-ci. Un nœud mathématique est un bout de ficelle sans épaisseur, plus ou moins entortillé et dont on a collé les extrémités. Le cercle qu'on appelle aussi un tore de dimension 1, est un nœud particulier appelé, du point de vue des nœuds, le nœud trivial. Un nœud est donc une manière particulière de déformer un cercle dans l'espace. Le nœud a ici un rôle ambigu. Il attire ici vers lui les voyageurs situés sur les trajectoires vertes, il joue donc le rôle d'un attracteur, mais au contraire, les voyageurs situés sur les trajectoires en or fuient avec horreur ce tracé rouge, il agit comme un répulseur. Autre exemple de nœud: celui-ci construit par l'architecte russe Dmitri Kozlov, promoteur de l'implantation en Russie du projet de parc mathématique ARPAM. Un théorème énonce que toute surface connexe fermée peut d'une certaine façon être représentée à l'aide d'un seul nœud dont les croisements dessous-dessus alternent.

Revenons maintenant à l'examen de l'immeuble \mathfrak{M} . $\mathfrak{M} \rightarrow_{16..}$ en désigne la partie construite depuis les origines jusqu'au 17-ième siècle. Ces images **22 23** donnent une première idée de son contenu géométrique: à savoir, pour l'essentiel, les polyèdres, les coniques et quadriques.

Même si, depuis les origines de l'humanité, les savants sont bien sûr confrontés aux mouvements du ciel, même si, 22 siècles avant Liouville, Platon avait déjà reconnu (livre V des *Lois*) que tout mouvement s'accomplissait par translation et rotation, le contenu premier de \mathfrak{M} ignore le mouvement, provient essentiellement de l'observation de la forme et de la diversité, car jusqu'à la Renaissance au moins, les hommes ont eu tendance à partager une vision particulièrement stable sinon figée⁵ de l'organisation du monde et des sociétés⁶.

Le contenu primitif de \mathfrak{M} se rapporte donc essentiellement à la forme et à la diversité. **18.1** La diversité est sans doute première car elle est plus spontanément

⁵ Un exemple actuel : les Talibans

⁶ Ce n'est qu'à partir de ce 17-ième siècle que la construction de l'immeuble connaîtra un nouvel élan, avec l'introduction appuyée de la prise en compte du mouvement, à la suite des travaux précurseurs notamment d'Oresme et de Galilée.

accessible que la forme, dont l'élaboration demande davantage d'attention, de travail cérébral. C'est cependant sur la forme que je vais d'abord dire quelques mots.

Son observation et sa représentation sont naturellement à l'origine de la **théorie des formes rigides**, **25.6** que l'on désigne traditionnellement par le nom de **géométrie**. Le terme géométrie a son origine dans la description de l'activité socio-économique assez tardive dans l'histoire de l'humanité, de mesure de l'étendue d'une parcelle cultivée. Cette première théorie des formes est rigide car les questions métriques, **25.7** c'est-à-dire de longueur et d'angle ont toute leur place dans la définition complète des objets de cette théorie. Elle est aussi d'apparence macroscopique, par opposition à la géométrie fractale d'apparence rapidement microscopique, sur laquelle le physicien Jean Perrin, dans son livre sur les Atomes de 1913, le premier, attirera l'attention.

Par opposition à la présence de la rigidité, est la **théorie des formes souples** ou **topologie** **25.8** où les questions métriques sont ignorées. Ainsi, un topologue ne fait pas de distinction entre une pierre précieuse étincelante de couleur grenat et une bille toute ronde de la même couleur. Elles apparaîtront en fin d'exposé.

La représentation originelle de la forme est physique et locale **25.9**: c'est le point puis le trait, gravés dans le bois ou dans la pierre; plus tard sur le sol pour délimiter le champ.

En premier lieu, apparaît le *point*, noir, le tore de dimension 0, il représente l'inconnu face à nous, obscur, peut-être inquiétant, la singularité aux potentialités a priori infinies, mais qui se détache sur l'arrière-plan d'un blanc éclatant. Vient ensuite le *trait*, et son prolongement la *ligne*, droite ou courbée.

26.4 Les traits comme les lignes sont physiquement les tracés d'*ombres*, c'est-à-dire, dessinés par les rayons lumineux issus d'une source située à distance finie ou infinie, les *projections* sur le plan rigide du sol du *bord* des objets physiques présents dans l'espace qui nous environne. Ces ombres sont en quelque sorte les spectres des objets. Le « théorème de Thalès » est une observation physique sur les ombres. De là viennent ces affirmations de Einstein et Hilbert: « la géométrie est une théorie physique ». Plus généralement, la théorie expérimentale se déploie en une physique théorique qui se déploie elle-même en une théorie physique plus abstraite, les mathématiques.

26.5 Les *projections*, qui engendrent les ombres, les spectres et les valeurs spectrales, permettent de représenter et de voir, sur un espace connu et fixe, des propriétés importantes des objets, éventuellement en mouvement, situés dans d'autres espaces moins immédiatement accessibles.

La projection est très utilisée par les physiciens tant dans les fondements de leurs théories que dans la réalité expérimentale. En bref résumé, elle engendre la rencontre, la connaissance, la création. Elle est en quelque manière la reine mère de la famille des représentations.

26.9 Du côté de la diversité, sont les nombres entiers 1, 2, beaucoup, : ce sont, primitivement, des *représentations abstraites puis concrètes de l'existence et de la présence* d'objets, *par des dessins appelés chiffres arabes dans notre civilisation* représentations initialement matérialisées par des points et des traits. Ils acquièrent le statut premier de représentants de la quantité.

26.11 Aujourd'hui, les nombres méritent d'être compris comme des *représentations*, en général à l'aide de ces chiffres disposés en tableaux, d'une part de *lieux de position*, et d'autre part, dualement, de mouvements, plus précisément d'*opérateurs* qui induisent des mouvements: ce sont d'abord les *translations* (associées aux nombres entiers, aux nombres décimaux, physiquement aux impulsions mv), puis les *translations et rotations* (rotations physiquement associées aux moments angulaires $m\omega$) dans des espaces a priori de dimension quelconque (en dimension 2, les soit-disant complexes ou nombres de N. Chuquet (1484), en dimension 3 les nombres de Hamilton ou quaternions), plus généralement des similitudes, mais on pourrait aller au-delà en fonction de nécessités physiques ou mathématiques. **27** Par exemple, en dimension 2, la rotation d'un quart de tour, l'opérateur de rotation de $+ 90^\circ$ (25 caractères) est noté $\begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$ (7 caractères) ou encore en raccourci sous le vocable de *iota*, i (1 caractère): il envoie le point (1, 0) noir situé sur l'axe horizontal du plan sur le point (0,1) bleu de l'axe vertical. Une seconde rotation de 90° i envoie ce dernier point sur le point (-1, 0) rouge de l'axe horizontal. On écrit en super raccourci: $i(i(1)) = i^2(1) = i^2 = -1$. La racine carrée de i^2 , soit i , est aussi la racine carrée de -1. i n'est nullement un nombre imaginaire comme on l'enseigne encore parfois⁷. Il est ici le symbole d'une rotation de 90° .

Ces nombres font l'objet de ces mystérieux chapitres des mathématiques: **l'arithmétique, et la théorie des nombres**. Mystérieux car ils renferment deux propriétés basiques que l'on ne sait pas toujours démontrer⁸.

⁷ Certains enseignements sont à revoir en profondeur...

⁸ La première, toute simple, a été observée par Goldbach au 18-ième siècle, tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers, la seconde par Riemann un siècle plus tard, les zéros non triviaux d'une certaine fonction, sont tous de la forme $1/2 +$ quelque chose. Cette fonction, introduite par Euler et reprise par Riemann et qui joue un grand rôle en théorie des nombres et en physique, est par exemple définie comme la somme des inverses des entiers élevés à une puissance donnée.

PREMIÈRE PARTIE

ILLUSTRATION DE LA « DIVERSITÉ » (NOMBRES) ET DE LA FRACTALITÉ

Je vais maintenant présenter quelques œuvres issues de l'observation de la diversité. Nous verrons ensuite des illustrations provenant des univers géométrique et topologique, et pour terminer d'autres illustrations provenant de l'étude des mouvements.

29

L'auteur de cette œuvre est Anatoly Fomenko.

<http://virtualmathmuseum.org/mathart/ArtGalleryAnatoly/Anatolyindex.html>

Il a aujourd'hui 77 ans. Élève, étudiant très brillant dans toutes les disciplines, il obtient une médaille de bronze à l'âge de 13 ans pour ses sculptures et dessins. Il sera récompensé bien plus tard en mathématiques par trois prix de l'académie des sciences d'URSS⁹. Voici rapidement la dernière page de l'un de ses livres à partir duquel a été conçue la version anglaise de **Mathematical Impressions**. On apercevra également le nom de Yuri Manin, auteur d'une postface :

<http://dfgm.math.msu.su/files/fomenko/myth-vved.php>

Toutes les œuvres de Fomenko sont produites d'un seul jet, à l'encre de Chine et au crayon. il n'utiliserait jamais ni gomme, ni grattoir. Deux caractéristiques générales se dégagent de l'examen de ses œuvres, la présence obsédante de l'infini, celle de la déformation. Dans cette première œuvre, les nombres sont représentés non pas par des chiffres, mais par des points noirs primitifs inscrits dans des dominos. Souvenirs d'enfance ? Peut-être.

À gauche le nombre **π** , à droite **e** le nombre de base de l'exponentielle, deux nombres importants, dont l'écriture en décimales est sans fin. Ce n'est pas seulement par un effet de perspective que la tour va s'amenuisant vers le bas. La présence dans beaucoup d'œuvres de Fomenko du phénomène fractal, qui accompagne la réduction régulière de taille entre les barreaux d'une échelle interminable, témoigne de la fascination de Fomenko pour l'infini. Ici, en plus, les dominos qui tombent de manière disjointe expriment l'idée et la présence d'une cassure réductrice, à terme d'une destruction inexorable. **30**

Dans cette seconde œuvre, le nombre et son infinité sont à nouveaux présents. Il s'agit encore du nombre **e** qu'on peut lire à partir du centre et en suivant une spirale qui tourne dans le sens inverse des aiguilles de la montre. On y remonte le temps. À

⁹[Ses travaux portent entre autres sur la topologie, cette descendante de la géométrie où l'on est affranchi des questions métriques, mais surtout, en liaison avec la physique et la mécanique, sur les surfaces minimales dans les espaces symétriques et la géométrie dite symplectique.]

quoi alors peuvent tristement penser les deux personnages, le visage caché, contrairement à ce qu'avait montré Dürer ? Chacun pourra l'imaginer. Une possibilité est peut-être suggérée par l'univers fractal présent en haut et à gauche de cet hommage à Dürer. Entre deux barreaux qui courent, on voit une suite de symboles qui, selon Fomenko, sont d'autres représentations des nombres. À nouveau donc infinité des nombres, et infinité des barreaux de cette forme d'échelle. Pour ma part j'y vois aussi autre chose. Fomenko a passé son enfance dans la ville de Magadan, la capitale minière de la célèbre Kolyma où furent déportés tant de gens¹⁰. Sa famille et lui-même, quand bien même avaient-ils des situations privilégiées, ont beaucoup souffert de ce qu'ils ont vu. Ce fractal est peut-être la représentation d'un mur le long duquel courent les noms des disparus. Chaque strate représente une génération en quelque sorte. Le tore polyédral, rigide, qui se dresse face au mur est peut-être le symbole du cadavre générique, figé dans la glace, et qu'on a hissé, comme un défi, ou bien celui de sa bouche, de ses lèvres d'où s'échappe le cri, étouffé dans le silence de la nuit étoilée. Quittons ce spectacle. On peut voir aussi dans ce fractal une expression symbolique et condensée d'une évolution qui s'accomplirait par sauts pseudo quantiques, au bout desquels prennent naissance rapidement des entités, des structures nouvelles qui s'étalent en de nouvelles strates.

31

Fomenko rend ici hommage à Dürer, mais aussi dans cette autre œuvre, à Brughel, Bosch et Dali, dont il partage l'imagination, la puissance d'expression, et, pour les deux premiers au moins, les vues critiques sur l'homme et ses comportements. Plus jeune, il avait participé à la création d'un club musical. Sans doute se représente-t-il au milieu du tableau songeant à ce qui était à son époque des conjectures : celles de Fermat et de Poincaré, celle de Riemann toujours présente, toutes les trois discrètement formulées. La répétition à l'infini, la fractalité, ces thèmes récurrents dans l'œuvre de Fomenko, sont naturellement présents ici, à travers par exemple cette lignée infinie de joueurs de pseudo-trompettes, des demi-sphères hyperboliques. On y voit un pavage noir et blanc, en haut à gauche une astroïde, engendrée par le mouvement d'un point d'un cercle qui roule sur un autre cercle. Mais il y a aussi des haches et des coupeurs de têtes, arborant parfois une casquette stalinienne. Font pendant, en haut à droite, les quatre disques emboîtés d'un soleil rayonnant, symbolisant la tête de Don Quichotte dont on distingue bien le cheval et la lance. Ce thème de Don Quichotte, la beauté de l'innocence face à la malignité du monde, est aussi très présent chez Dali, voir son musée magique rue des Poulbot à Montmartre (<https://www.daliparis.com/information-pratique/>).

32 On rencontre aussi ce même thème de Don Quichotte dans cette œuvre du canadien Luc Bénard, disparu il y a quelques années. La même présence de Don Quichotte chez ces trois peintres différents, Fomenko, Dali et Bénard, témoigne évidemment d'une sensibilité et d'une humanité partagée. Luc Bénard était un

¹⁰ Cf les Récits de la Kolyma de Chalamov.

autodidacte doué, il a dû quitter l'école à l'âge de 12 ans. Il a principalement travaillé pour la télévision canadienne. Ses œuvres de visualisation mathématique, réalisées en collaboration avec Richard Palais, ont été par deux fois primées par la National Science Foundation. **33** La première œuvre lumineuse que nous avons vue au début de l'exposé était de sa main. Elle a pour titre « Un mathématicien à Murano ». Elle nous montre deux surfaces minimales, un breather, une surface de Boy et une bouteille de Klein. Revenons sur son Don Quichotte. L'œuvre de Bénard est ici fractale, les dominos gravés et noirs de Fomenko ont été remplacés par des plaques lumineuses. Je profite ici de cette référence à Luc Bénard pour montrer deux de ses autres magnifiques œuvres en rapport mathématique direct avec la fractalité : **34, 35**. Le jeu sans fin des réflexions de la lumière entre trois miroirs sphériques définit un ensemble de trois bassins de fractales, les bassins du mathématicien Wada, dont les frontières sont infiniment imbriquées.

Je ne développerai pas davantage le thème fractal. Je renvoie sur ce thème à l'œuvre de Colonna, et reviens sur celui de la représentation du monde numérique, **36** où l'on a cette belle image de Colonna montrant le domaine occupé par quelques nombres appelés octonions ou nombres de Cayley. Ils généralisent les quaternions de par le même procédé formel par lequel on peut obtenir les nombres de Chuquet à partir des nombres réels.

Les octonions sont représentés par des points d'un espace à 8 dimensions. Colonna choisit un domaine de cet espace, dessine les droites joignant les points de domaine; on le déforme un peu, continûment, de manière à laisser inchangés les angles que ces droites font entre elles. De même qu'un plan dans un espace à trois dimensions est une coupe de cet espace, on coupe maintenant l'espace à 8 dimensions par un « plan » à trois dimensions. Notre image est la projection sur une feuille de dessin, l'écran d'ordinateur, du contenu de l'intersection de ce 3-plan avec le domaine considéré.

SECONDE PARTIE

EXEMPLES DE VISUALISATION DE LA FORME

1. Formes pour pavages

Quittons la théorie de la diversité et des nombres pour celle des formes, et d'abord celle des formes régulières et stables présentes dans la nature. On les rencontre en particulier dans les cristaux, comme par exemple les cristaux de neige, les quartz et autres cristaux de roche¹¹. **38** Leur observation et leur représentation ont d'abord conduit à fonder la théorie des polyèdres¹² réguliers, comme ceux que l'on connaissait à la Renaissance, puis plus tard, par l'examen de leurs propriétés de symétrie, ont fortement contribué au développement de la théorie des groupes d'objets, objets qui se composent entre eux pour donner des objets de la même famille, et qui présentent ce caractère de symétrie. A été majeur le rôle des cristallographes, en particulier celui de Pierre Curie, dans l'emploi en mathématiques du terme symétrie.

À travers la contemplation d'une vaste plage remplie à l'infini de sable fin, d'un champ de neige composé de flocons miroitants, ou bien à travers l'examen d'un seul cristal composé de molécules identiques, **40** l'observation de la nature là encore a joué un rôle moteur souvent inconscient dans l'évolution des mathématiques. Elle invite à poser le problème général: étant donné un domaine d'un espace, est-il possible de le paver, c'est-à-dire de le remplir, sans laisser de vide, par des objets identiques qui n'empiètent pas les uns sur les autres ? L'importance des propriétés de symétrie des motifs explique la place occupée par la théorie des groupes dans la classification des pavages.

On trouvera dans l'œuvre du graveur Jenner plusieurs pavages d'espaces de dimension variée (2, 3, 4) par des polytopes réguliers. **40** Sur toile, nous n'avons qu'une seule œuvre inspirée par un pavage de l'espace ordinaire par des octaèdres qui doivent être tronqués sinon le pavage est impossible, un pavage bleu et or qui fait penser à ce magnifique bleu et or de Giotto qui orne la voute de la chapelle Srovegni à Padoue. De par son ou plus probablement ses deux auteurs, M & V, cette œuvre symbolise en quelque sorte l'union chaleureuse, l'imbrication de l'art et des mathématiques.

¹¹ Les pythagoriciens s'en inspiraient, voire peut-être les constructeurs de pyramides, Pline le Jeune en avait une très belle collection.

¹² On sait classifier les polyèdres de cette théorie, laquelle n'est qu'un élément de la très vaste théorie des (m-n) polygones: leur inventaire est à faire - un (m-n) polygone est un ensemble de m points dans un espace métrique de dimension n reliés entre eux par des éléments de courbes a priori.

Dans le plan, nous avons pléthore de pavages. Ainsi, nous savons réaliser le pavage d'un disque, un grande pièce de monnaie infiniment plate, par d'autres disques, d'autres pièces de monnaie plus petites.

Le problème a été posé par le géomètre Felix Klein il y a plus d'un siècle, l'algorithme mis au point au début de ce siècle seulement par le trio Munford, Series, Wright¹³. Cet algorithme est d'abord basé sur l'emploi astucieux et répété d'une transformation géométrique simple appelée l'inversion qu'on enseignait autrefois dans les lycées, et qui m'a apporté beaucoup de joies. Cette inversion est présente au sein de la transformation utilisée par les auteurs précédents qui, dans une seule formule, concentre la translation, la rotation et l'inversion. Ils appellent la transformation de Möbius, mais elle a été introduite bien avant Möbius par Euler (en 1777), on l'appelle en (vieux) français l'homographie.

41 42 43 Jos Leys en a tiré de très belles illustrations et des animations qui fascinent les enfants. <http://www.josleys.com>.

44 On peut paver le plan l'aide de pentagones réguliers non convexes, mais non point à l'aide de pentagones réguliers convexes. Car l'angle en un sommet quelconque d'un tel pentagone n'est pas égal au quotient de 360° par un entier. On a cherché comment parvenir à paver le plan avec d'autres polygones permettant de faire apparaître des pentagones réguliers convexes. Le mathématicien Roger Penrose qui s'intéresse également beaucoup à la physique a proposé trois solutions comme celle-ci, la plus originale et admirablement illustrée par cette œuvre de trois mathématiciens Austin, Casselman et Wright. Le pavage n'est pas périodique, il utilise ici des couples de triangles accolés en forme de cerf-volants et de fléchettes. Ces triangles, provenant du découpage d'un pentagone, sont appelés des triangles d'or car leurs côtés vaut 1 ou le nombre d'or.

La théorie des polyèdres et ses généralisations recèle des interrogations inédites, comme celle que l'on pourra formuler à partir du simple exemple suivant. On considère dans un dodécaèdre tous les couples de sommets qu'on relie par un segment de courbe. On ne retient que les nœuds formés par ces éléments de courbe. On obtient ici quatre nœuds de trèfle disposés en une harmonieuse structure métallique¹⁴.

¹³ Leur magnifique livre, Indra Pearls, où ils décrivent l'algorithme, est d'une qualité pédagogique rare.

¹⁴ Se pose alors le problème plus général: faire l'inventaire des types de nœuds que possède un (m-n) polygone donné. Dans quelle mesure par ailleurs ces nœuds peuvent-ils représenter les lignes de transmission d'information au sein d'un ensemble de m agents, de m neurones, ou bien les attracteurs d'un système dynamique défini sur l'espace ambiant à l'intérieur duquel se trouvent les sommets du (m-n) polygone.

2: Visualisation de la Forme, surfaces minimales

Le spectacle de la nature offre à nos regards une profusion étonnante de formes très variées. Parmi les plus simples, celles des bulles, d'autant plus fascinantes qu'on a du mal à les coincer. Une surface est une sorte de peau infiniment mince. Les bulles de savon sont des surfaces fermées qui résistent à la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur des bulles. Leur courbure moyenne est constante. Une surface minimale est une surface ouverte s'appuyant sur une courbe donnée, de sorte que la pression est la même de chaque côté de la surface ce qui se traduit par la nullité de la courbure moyenne. C'est Euler en 1774 qui a introduit la notion et l'étude des surfaces minimales, Meusnier deux ans plus tard qui a montré que l'on pouvait les caractériser par leur courbure moyenne.

Se donnant de telles courbes d'appui, Patrice Jeener a calculé et gravé de nombreuses surfaces minimales originales, une bonne trentaine. **46** Je montre celle-ci, introduite par le mathématicien Edmond Bour en 1861, entre autres parce que j'aime bien le titre un peu humoristique que lui a donné Jeener: « Surface minimale à la Chouette ». La version que vous voyez est plus belle que celle qui est exposée.

On en lit une équation sur cette page, à gauche <http://arpam.free.fr/jeener.html>. d'où l'on peut déduire d'autres équations.

47 Patrice a aussi calculé et gravé de nombreuses formes de fleurs, de coquillages, comme par exemple **48** celle de ce beau triton (un cône sur lequel on trace des courbes logarithmiques).

La notion de surface minimale a été élargie par Wilmore qui a introduit la notion de surface à énergie de courbure élastique minimale. C'est à l'aide d'une sphère ayant cette propriété qu'a été fabriqué un film montrant le retournement de cette sphère. Cette question topologique a agité les mathématiciens de la fin du siècle dernier. Il s'agit de retourner la sphère élastique sans notamment créer de déchirure jusqu'à ce que la face intérieure bleue devienne la face extérieure de cette sphère. La surface peut se traverser elle-même. Il existe aujourd'hui 5 façons d'opérer ce retournement.

Il peut par exemple être réalisé en partant de la surface de Boy que nous avons aperçue en début d'exposé. Une surface de Boy représente l'ensemble des directions lumineuses issues d'un point. Construite par identification des bords d'une demi-sphère et d'un ruban de Möbius convenablement tourné, elle présente la symétrie d'ordre 3 (le bord du ruban de Möbius qui sert à construire Boy est un nœud de trèfle). On peut aussi procéder au retournement en faisant appel à la symétrie d'ordre 4 introduite par le mathématicien aveugle Bernard Morin (le tétraèdre, topologiquement équivalent à la sphère, possède cette symétrie). **49.1**Ce tableau de

Fomenko, montrant la surface de Morin, permet de suivre, de droite à gauche, la première moitié des étapes de ce retournement, la seconde moitié se lit en parcourant le tableau de gauche à droite.

49.2 Le tableau suivant de John Sullivan montre plus complètement les étapes du retournement utilisant la symétrie d'ordre 3, telles qu'on les voit dans le film auquel John Sullivan, actuellement en charge de la visualisation scientifique à Berlin, a très largement participé.

TROISIÈME PARTIE

Exemples de visualisation du mouvement

Le mouvement, nous l'avons déjà rencontré au début de notre visite avec l'œuvre de Jos Leys **52** montrant deux ensembles de trajectoires s'enroulant autour de nœuds de trèfle.

Dans ce même registre trajectorien, il est aussi divertissant qu'instructif de montrer ici ce que j'appelle les colliers de Colonna **54**.

Colonna introduit quelque part dans notre système solaire une nouvelle planète, et y place un observateur. Les colliers représentent les trajectoires de nos planètes habituelles que verrait notre observateur, elles sont pour lui chaotiques. On peut alors se demander s'il serait parvenu un jour à établir les lois de la gravitation à la Newton. Notons que dans la mesure où des périodicités locales seraient présentes, ces trajectoires pourraient être partiellement décomposées en nœuds.

Un universel de la nature est la présence de périodicités au sein de phénomènes ondulatoires omniprésents, des trajectoires sont enroulées sur des tores. **56** On a observé l'existence et la présence d'ondes particulières dans presque toutes les manifestations du monde physique, au départ en hydrodynamique (Russell, 1834). Imaginez que deux vagues se propagent sans changer de forme, l'une depuis A jusqu'à B, l'autre depuis B jusqu'en A. De telles ondes sont dites solitaires et appelées solitons. Non seulement elles ne changent pas de forme, mais leur rencontre éventuelle peut ne les affecter en rien. C'est le cas des ondes électromagnétiques de sorte qu'en quelque endroit où l'on se trouve, on peut écouter une multitude de radios. On obtient ces ondes comme solutions d'une famille d'équations diverses, dont celles caractérisées par la présence du d'Alembertien **57** une relation linéaire entre les

accélérations spatiales et temporelles. C'est le cas, par exemple, de l'équation de Sin-Gordon $u_{xx} - u_{tt} = c \sin u$, (plus généralement $a u_{xx} - b u_{tt} = c f(u)$).

Le site de l'admirable mathématicien Richard Palais, admirable tant sur le plan mathématique que sur le plan humain, ce site donc abrite un riche musée virtuel de référence couvrant un très grand nombre d'objets mathématiques. Voici **59** la salle de ce musée consacrée aux surfaces et aux ondes solitaires.

http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_o.html

60 On y rencontre ce tableau étincelant dû au pinceau informatique de Luc Bénard qui illumine, inonde de lumière, cette solution l'équation de Sin Gordon appelée un breather et associée à un couple de soliton - antisoliton. **61** J'imagine que Luc aurait également été heureux de produire cette image haute en lumière qui illustre la théorie des singularités des applications différentiables à travers ses applications à l'optique.

Qui dit mouvement, pense aujourd'hui vidéo.

En tout début d'exposé a été souligné le fait que l'univers mathématique, tout comme l'univers physique, est un univers en évolution. C'est par une illustration simple sur ce thème que je vous propose de conclure. Nous allons suivre, à sa manière, ce processus d'évolution. **62** Il est caractérisé par la manifestation constante de mouvements de déformation, accompagnée par moments de phénomènes de bifurcation, dont l'éclatement d'une singularité en deux singularités jumelles mais opposées dans leur déplacement est sans doute parmi les plus archaïques.

63 Le contenu de la vidéo est également lié au fait que, dans notre espace à trois dimensions, n'existent, classées selon le caractère positif, négatif ou nul de leur courbure totale, que trois types de surfaces et de géométries correspondantes. La vidéo nous montrera comment passer, de manière continue, d'un type à l'autre.

Elle décrit d'abord un processus de construction d'un objet de courbure totale nulle, **64** le tore géométrique T^2 plongé dans notre espace usuel. D'une manière générale, le tore T^n est l'une des figures les plus fondamentales des mathématiques, il est plus primitif que la sphère, on rejoint ici le mythe platonicien. Le tore T^2 a la forme de la surface d'une bouée de sauvetage, d'un tube, d'un bracelet.

65.1 Ce tore sera ensuite déformé, un point singulier apparaît, éclate en deux points singuliers jumeaux. **65.2** La déformation se prolongera jusqu'au moment où ces points singuliers jumeaux deviennent les pôles opposés d'une sphère, un espace géométrique de courbure positive +1.

La déformation se poursuit, les jumeaux s'élancent vers l'infini, **66** on obtient alors un nouvel objet géométrique, la pseudo-sphère de courbure négative -1. On a ainsi rencontré les trois types de géométries, 0, +1, -1.

On reviendra ensuite petit à petit au début de notre construction. où l'on verra apparaître d'autres petits phénomènes ... Voici la vidéo:

Tore SGH

Ce bijou est offert à toutes les dames présentes dans cette salle. Je vous remercie.