Du Pourquoi et de l'Emploi de ce Power-Point

Pendant la semaine qui a précédé les vacances de Noël 2011, s'est tenue, dans le collège parisien Oeben, une petite exposition soutenue par des exposés interactifs de présentation des œuvres, et d'initiation à leur contenu mathématique. Les 8 classes d'élèves qui ont assisté à ces exposés, faits par Jos Leys et Claude Bruter, étaient âgés entre 10 et 14 ans. En mars 2014, dans le cadre de la semaine des mathématiques organisée par l'Académie de Paris, de nouveaux exposés ont été faits au collège Rognoni, collège dit des Enfants du Spectacle.

Ce power-point présente un ensemble d'images préparées par Claude Bruter, et d'où il a extrait le contenu de ses propres exposés. A titre très indicatif, des exemples de commentaires sur ces images ont été introduits. Selon l'inspiration du moment, les questions des élèves, d'autres commentaires peuvent être faits.

La présentation la plus fréquente a consisté à faire appel au premier pdf, suivi des dernières images du second pdf accompagnées par la projection du film. Diverses animations, l'emploi de ficelles et de pâte à modeler et des différents modèles de nœuds réalisés par Philippe Rips et Dmitri Kozlov se sont révélés fort utile pour capter et fixer l'attention des élèves.

BONNE ANNÉE

Les MATHÉMATIQUES et les ARTS

Le plus Beau des Royaumes !

- Diapo précédente :

Moi le 24 Décembre

Vous ne me croyez pas? Il faudrait que je vous invite l'an prochain.

Diapo suivante:

Mon copain, Lapo-néon

esprit éclairé, il est allé en Russie, en est revenu, refroidi !

C'était un bon mathématicien.


TitusBoy25

- En sixième comme en quatrième, il était aussi artiste et pouvait faire son auto- portrait,

  grâce aux mathématiques, bien sûr !

Les mathématiques, c’est quoi ? Retenez ceci : tout simplement ***une manière un peu élémentaire, mais efficace, de décrire et de représenter les traits essentiels du monde qui nous entoure.***

Elles facilitent la compréhension et la prévision.

- Regardez autour de vous, vous voyez ici et aujourd’hui:

des placards qui sont des parallélépipèdes, cet écran qui est un rectangle.

Le monde autour de nous est peuplé de formes. Et ce sont ces formes principales que nous allons d’abord découvrir. Les mathématiciens, qu’on appelait autrefois des astrologues et des géomètres, les ont étudiées en premier.

Ce sont donc des formes fondamentales.

- Tenez, regardons l’autoportrait, quelles formes voyez-vous ?


TitusBoy25

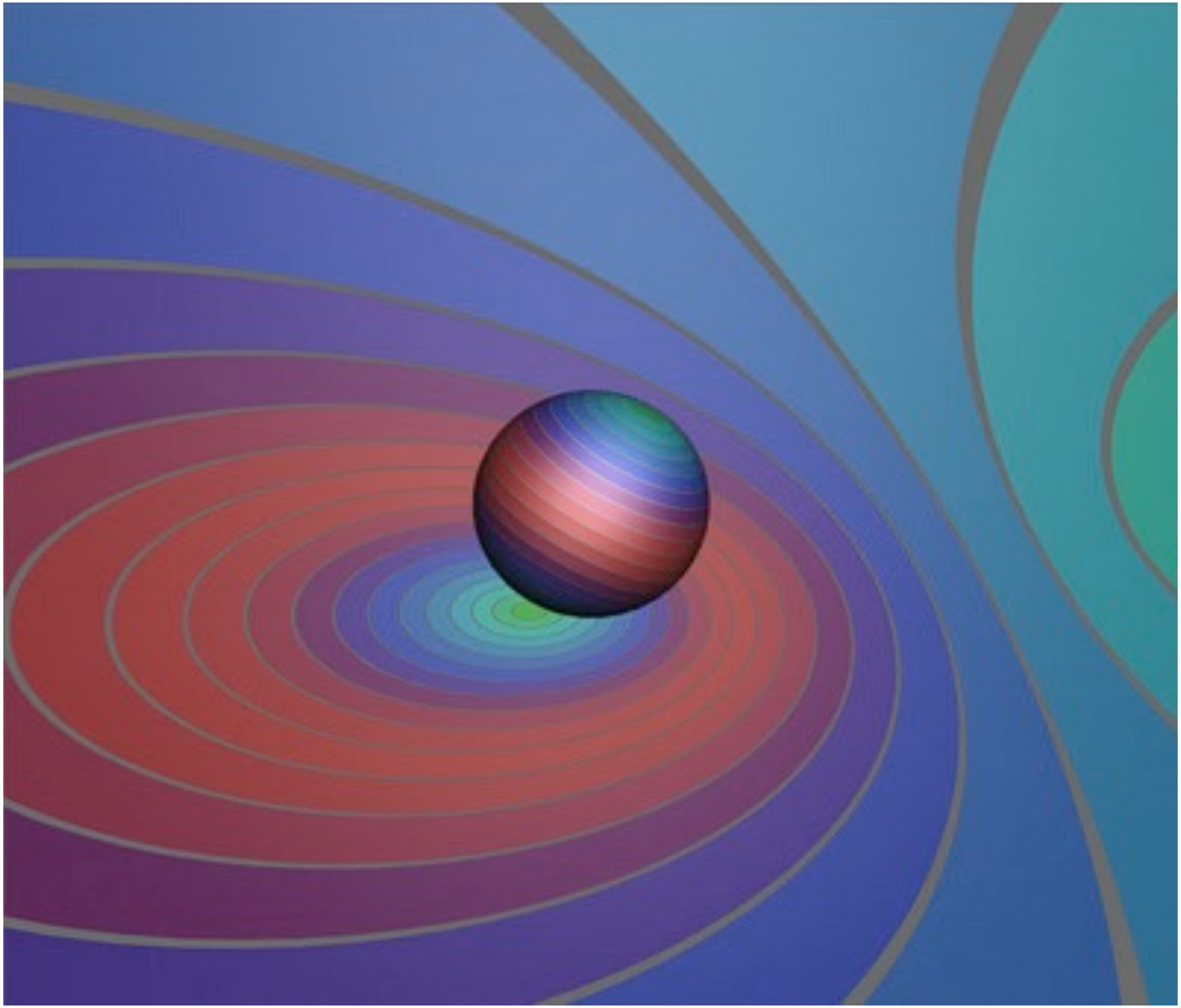
- Des <u>boules</u>, des <u>sphères</u> et des <u>cônes</u>

(glacés mais que ne fondent pas : des verts pour les sapins de son entourage, presque rouge pour le bout de son nez).

- Lapo-néon a fait son autoportrait :

Je suis sûr que vous pouvez maintenant faire aussi bien que lui pour dessiner et peindre cette carte !

- Quelques mots sur la sphère à travers trois oeuvres de l'exposition.



- Dans le tableau fait par Tom Banchoff et ses amis, on voit la sphère, placée au dessus d’un écran plat : les pôles nord et sud sont bleus ou bleus-verts, comme les glaces de l’Artique et de l’Antartique. Il fait plus chaud au milieu de la sphère, comme chez nous.
- Une source de lumière est placée au pôle nord, elle n’est pas montrée par l’artiste. Sur l’écran plat on voit les images bleues des glaciers, et entre les deux, l’image rouge du chaud milieu de la sphère. Regardez bien :

12

L'image d'un cercle est un cercle.

Cette propriété est très importante, elle est utilisée pour la fabrication des cartes de géographie. Elle signifie qu'*on tourne de la même façon sur la sphère et dans le plan de la carte de géographie.* Les mathématiciens le démontrent, c'est-à-dire savent expliquer pourquoi il en est bien ainsi. Un énoncé que les mathématiciens démontrent est appelé un <u>théorème</u>.

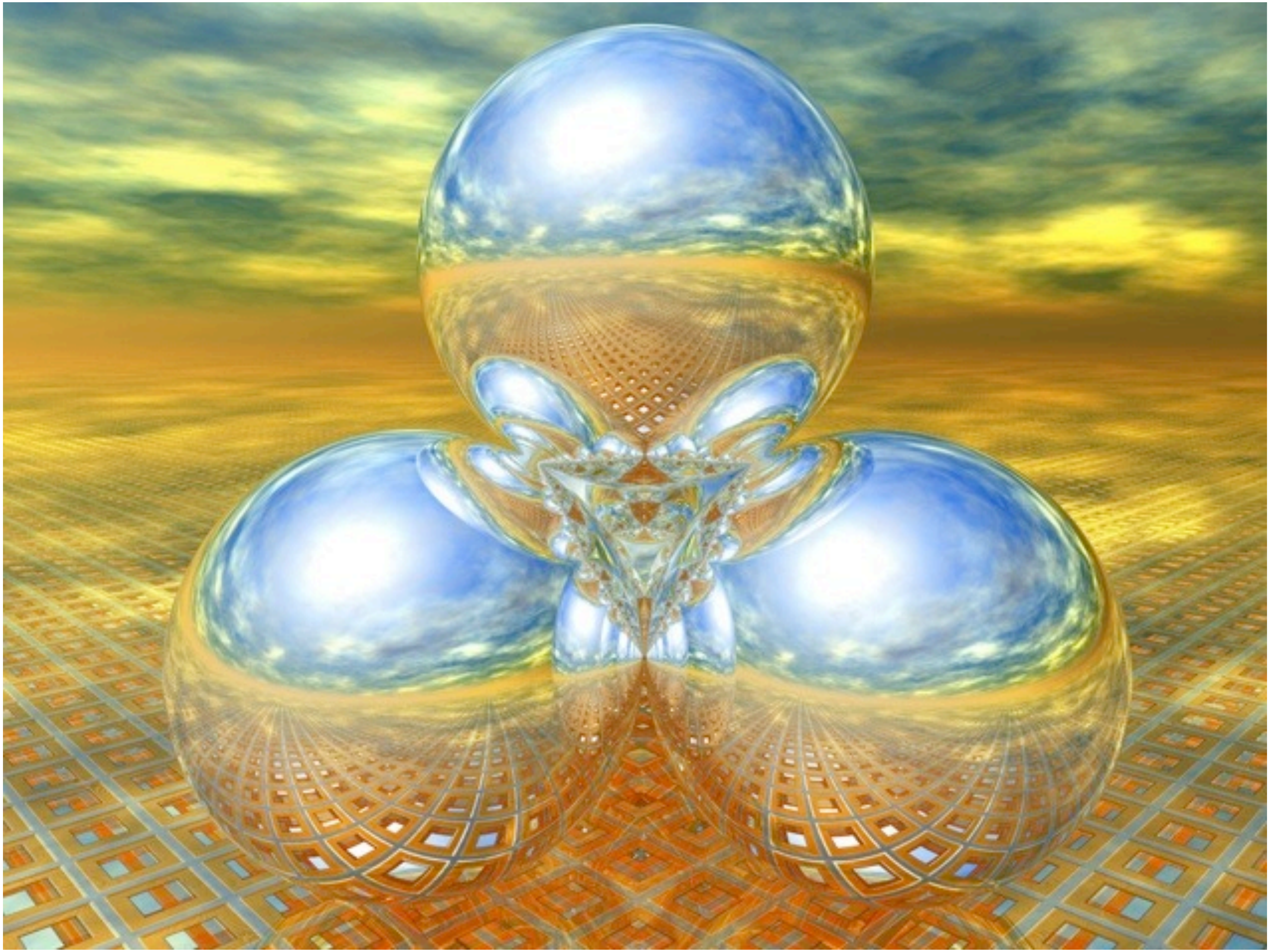
Cette image de la sphère sur l'écran s'appelle la <u>projection stéréographique</u> de la sphère.

Deuxième utilisation de la sphère par les artistes, une oeuvre de Luc Bénard:

- Luc est canadien. Il connaît la glace et ses effets de miroir. Alors il a pris des miroirs en forme de sphère (des «luciphères»).

Dans le tableau de Luc, chaque luciphère renvoie sans arrêt sur l'autre l'image du sol et de son pavage. Ces images sont de plus en plus petites, mais représentent toujours le même motif.

On est entré dans <u>l'univers fractal</u>, caractérisé par l'auto-similarité, la répétition à l'infini à des échelles chaque fois plus petites d'un motif donné.

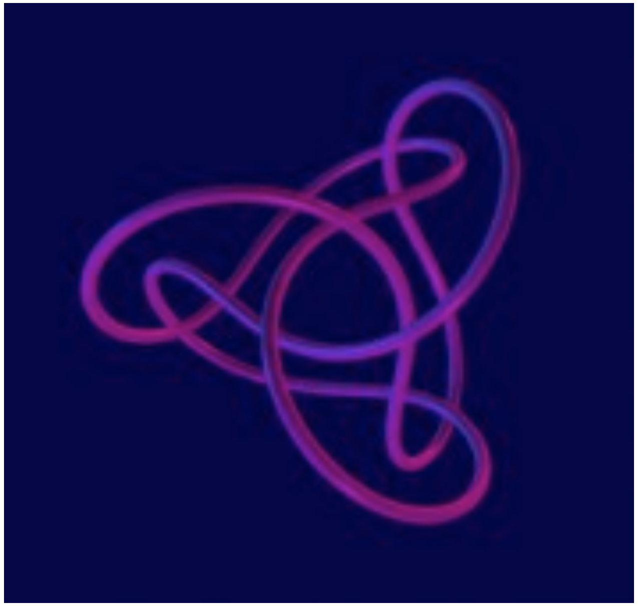


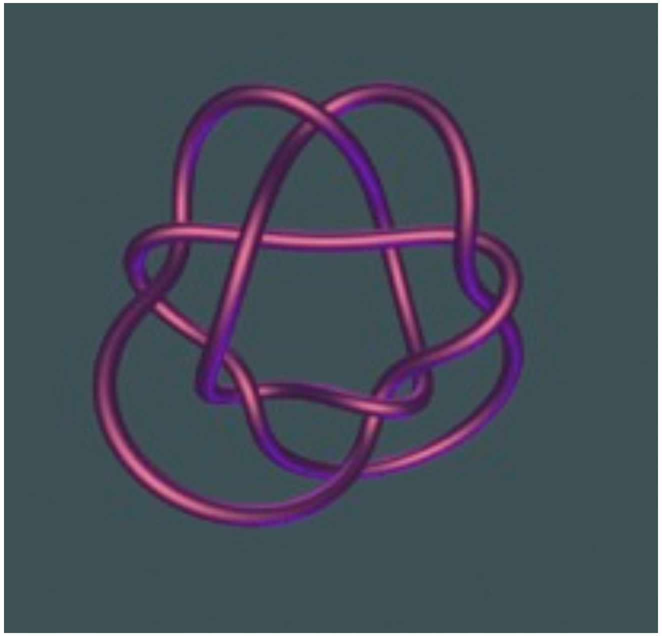
- . Comme vous le savez, le cercle a un point milieu qu’on appelle son centre, et tous les points du cercle sont situés à la même distance de ce centre.
- Pour la sphère, c’est pareil. Elle a un centre, et tous les points de cette sphère sont situés à la même distance du centre de la sphère.
- Le cercle et la sphère sont donc manifestement des objets qui appartiennent à une même famille, la famille des n-sphères.
- Cette famille a été très étudiée par les mathématiciens, car l’intérieur des domaines délimités par des objets de cette famille, les boules, servent souvent de briques pour construire d’autres objets, parfois plus complexes.

J'ai dit «parfois», non ce n'est pas sérieux, c'est souvent plus complexes. Rien qu'avec les cercles vous n'avez pas idée de tout ce qu'on peut faire !

La propriété essentielle du cercle, pour le mathématicien qui ne s'intéresse guère aux questions de longueur, de distance, est la suivante - il est appelé un topologue : si je me promène sur le cercle, en partant d'un point quelconque du cercle, je reviens à mon point de départ.

Autrement dit, un cercle est comme une ficelle dont les deux extrémités se touchent. Le cercle change de nom, de patronyme, il entre dans la famille d'objets appelés les noeuds, dont il est le plus simple élément.






18

•

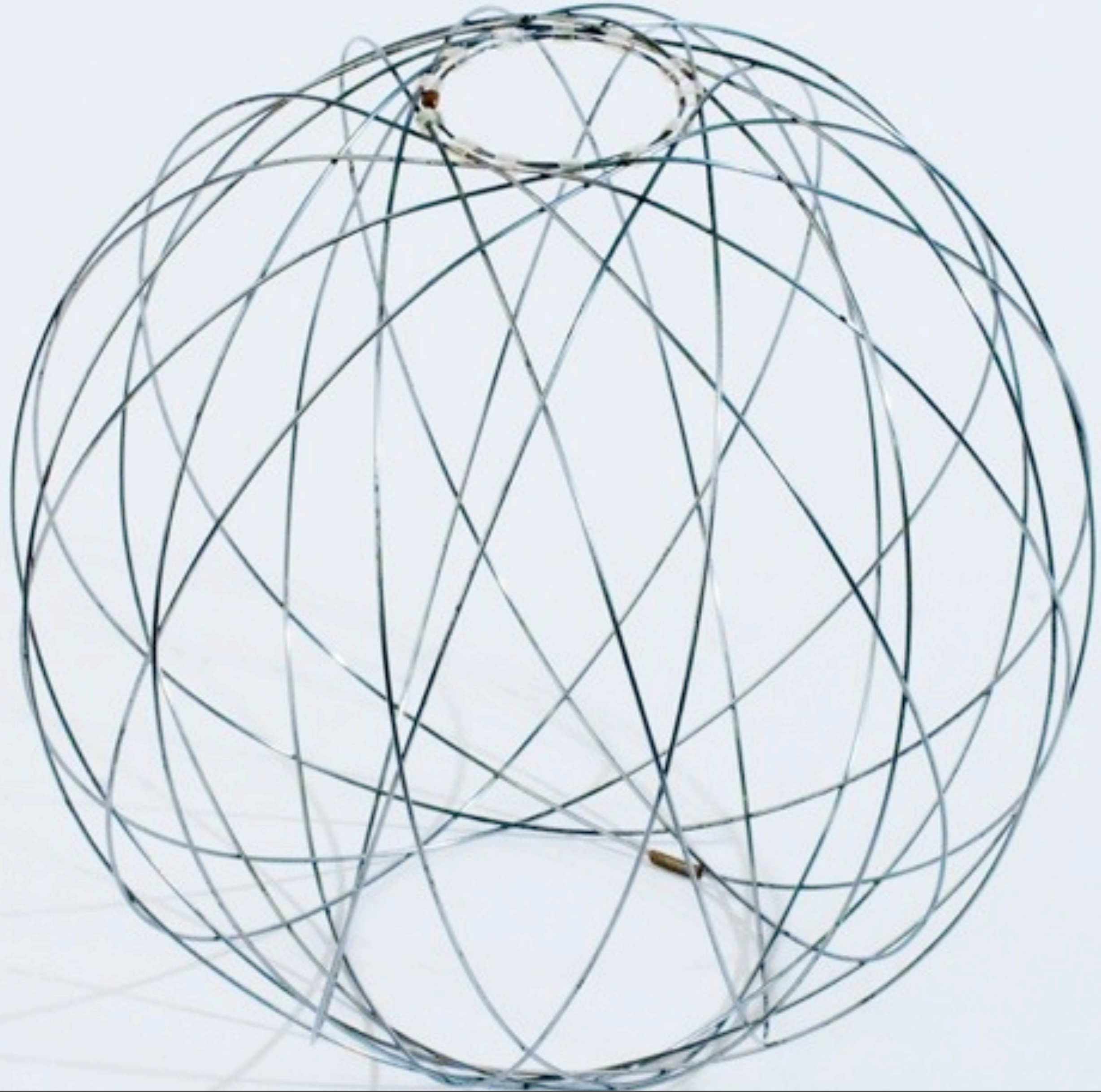
- Et voici le voyage de Dmitri sur la sphère.

Dmitri a voyagé beaucoup plus que Laponéon. Il a visité presque entièrement notre terre. Quel veinard !

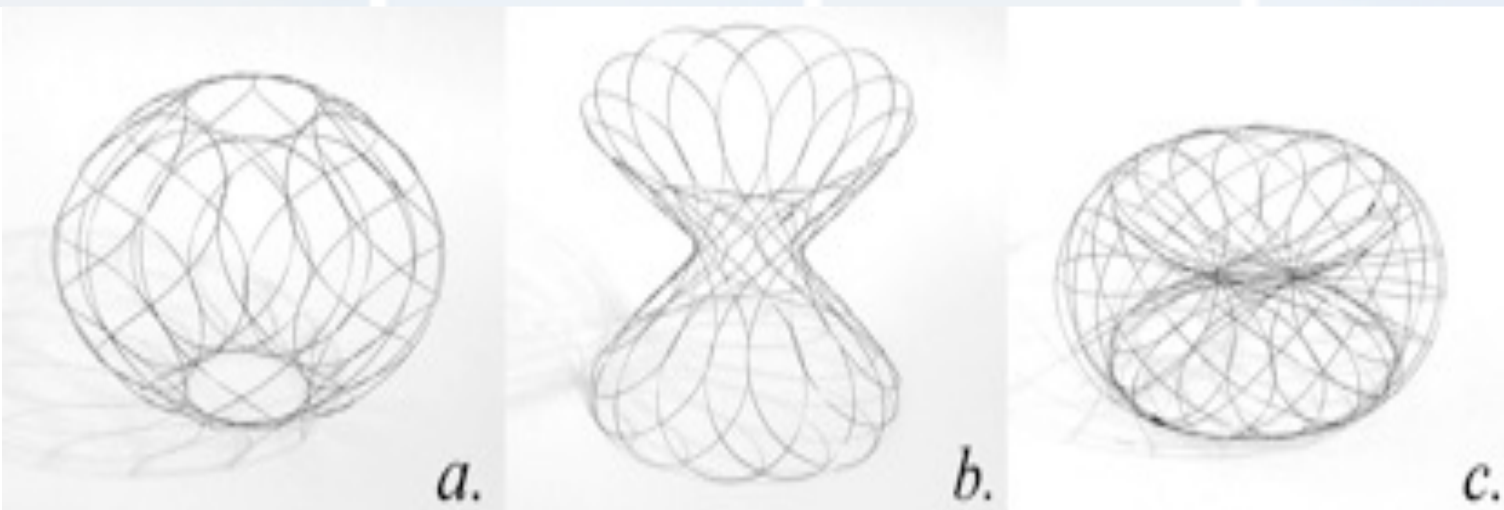
Il a tracé en bleu le chemin qu'il a parcouru: une courbe, tracée bien sûr sur la sphère, et qui revient à son point de départ. Un voyageur le long de cette courbe ne la quitte jamais.

Une courbe le long de laquelle on se déplace, qui permet de revenir à son point de départ, qu'on ne quitte jamais, est, comme le cercle, un <u>nœud</u>.

Le miracle de Dmitri: si on appuie sur la sphère, elle s'aplatit, le nœud devient plat. Si on relâche la pression, le nœud se retrouve aussitôt sur sa sphère d'origine.



- Voici d’autres noeuds réalisés par Dmitri.



Comme vous le voyez, un noeud peut être déformé de mille façons, et de manière douce.

On appelle <u>homotopie</u> une telle déformation.

Le Ballet des Cinq

http://www.josleys.com/gfx/Danse_03.mov

On commence par voir un point noir : il représente un cercle de rayon nul. Ce point est donc ici un cercle particulier, une singularité de la famille des cercles. Le rayon augmente et le cercle se déploie, d'abord dans le plan, puis en ondulant dans notre espace habituel. Remarquez l'ombre du noeud sur le sol.

Regardez comme il se déforme se tord, fait des boucles. Vous voyez son ombre sur le sol : c'est une courbe plane qui se croise, le nombre de croisements est égal au nombre de boucles. La courbe sur le sol est du genre appelé épicycloïde. Elle servait, dans l'antiquité, à représenter le mouvement des planètes autour du soleil.

- La leçon à tirer de ce phénomène :
- **Ne prenez jamais l'Ombre, l'Apparence pour la Réalité, le Nombre pour le Fait.**
- Habitant le pays plat, vous voyez une courbe qui se croise, alors que la réalité est une courbe qui ne se coupe pas, sans croisement.

Le film se déroule : vous voyez apparaître, séparant deux boucles consécutives, un point où se produit une légère rupture de continuité. En ce point la courbe descend rapidement à gauche, et remonte rapidement à droite. Ce point est encore appelé un point singulier.

24

- Les mathématiciens aiment beaucoup et étudient avec attention et ardeur les <u>point singuliers</u>. C'est là que se produisent les évènements importants. La notion de singularité est une des notions fondamentales.
- **Les points singuliers sont rares**,
- c'est un théorème de mathématiques. Mais ils sont hautement significatifs. Tenez, un président de la république est une personne singulière, une singularité : elle est la seule à occuper une position aussi haute au sein de la société, tout le monde le regarde, et son pouvoir médiatique est immense.

La justification des points singuliers dans notre animation va apparaître. Cinq personnages arrivent, et vont danser. Suivez leur mouvement. Ils posent le pied par terre en descendant, et repartent en l'air après avoir pris appui sur le sol, où ? Au point singulier, bien sûr.

- Après l’autoportrait, un coup d’œil sur l’architecture, un domaine immense qui, dans ses débuts, a fortement contribué à la mise en place des mathématiques (géométrie des pyramides construites il ya 5 000 ans, calculs pour leur réalisation).

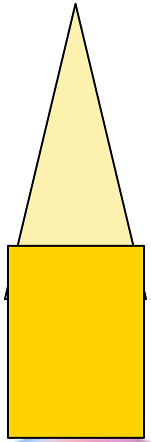
- Visite de l’Hôtel des Invalides, construit sous Louis XIV, où dorment beaucoup de généraux célèbres, dont Napoléon, mais aussi un géomètre très célèbre, Gaspard Monge, que d’ailleurs Napoléon admirait beaucoup.

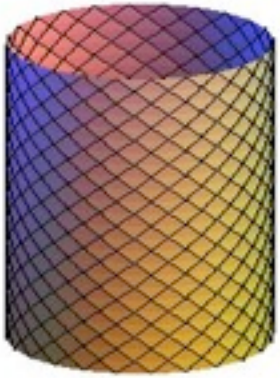
- Coup d’œil aussi en passant à la basilique Sainte-Sophie (Istanbul en Turquie), et sa merveilleuse coupole construite en 537.

- Les minarets qui l’entourent (XV e siècle), principalement des cylindres surmontés d’un cône, font penser aux grandes fusées modernes !

- Après cette courte visite lointaine, retour à l’hôtel (construit sous Louis le quatorzième, nous l’avons déjà dit).

- Grossièrement, le construiriez-vous comment ?

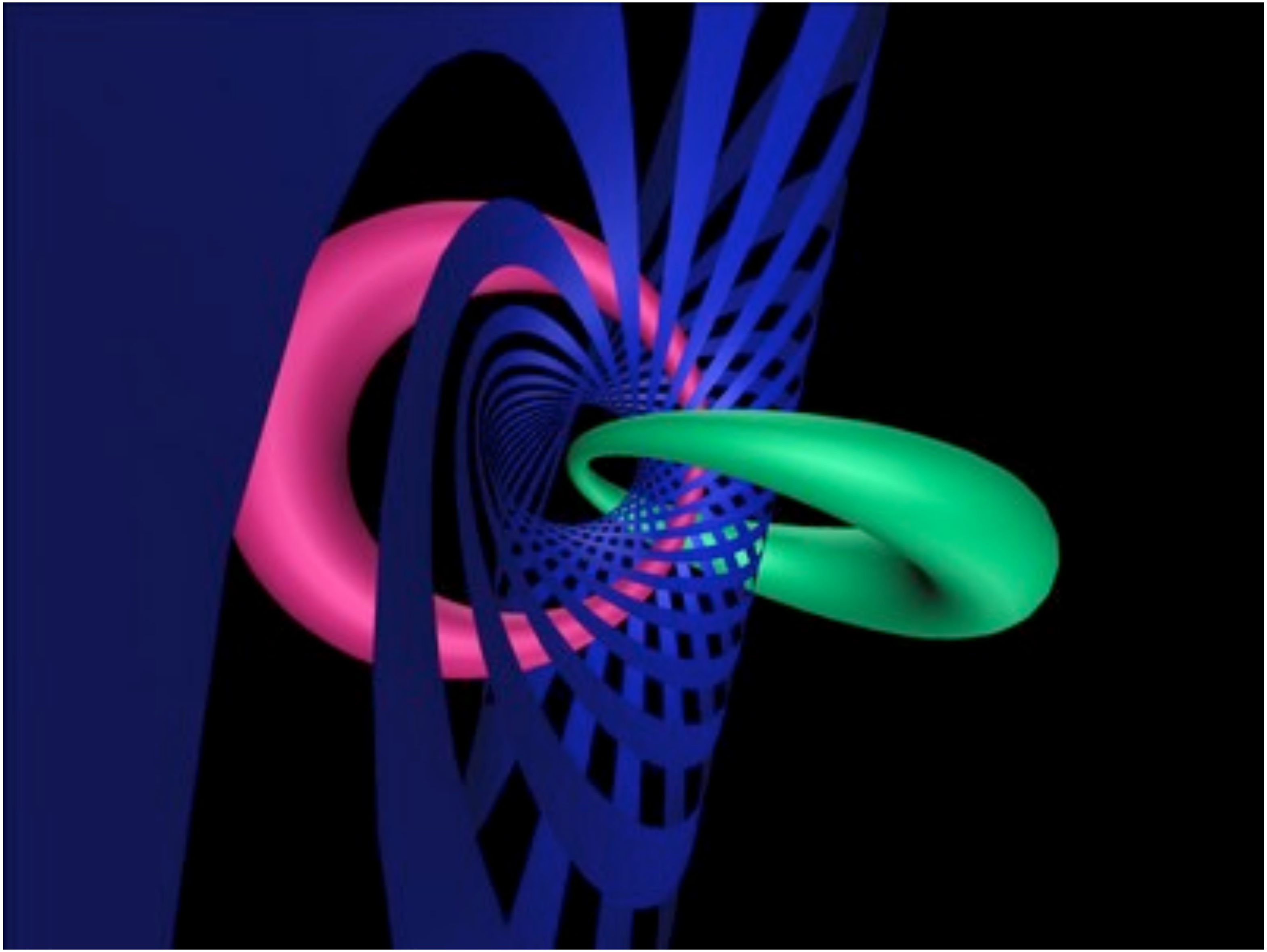


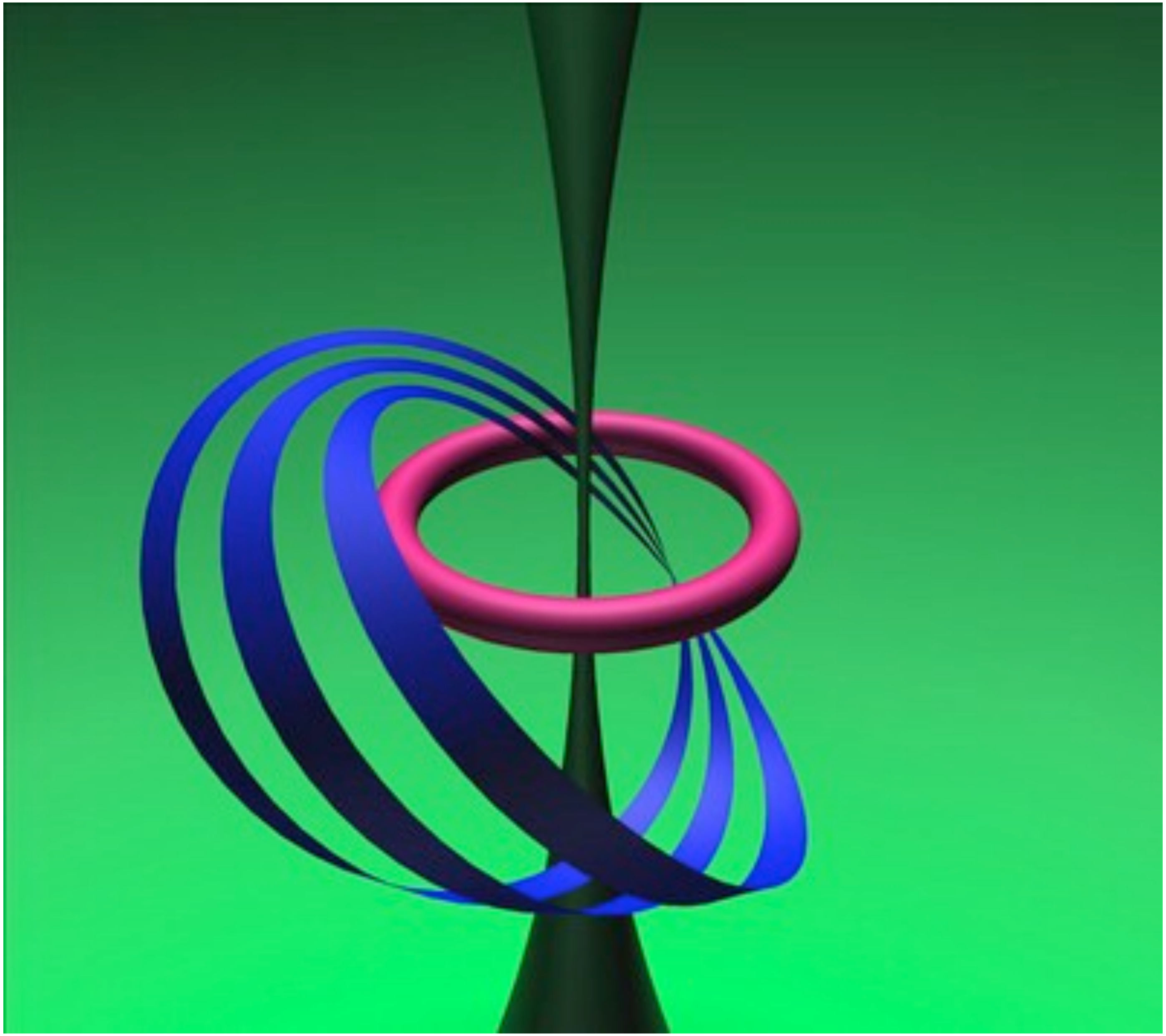


- L’emploi de parallélépipèdes, d’un cylindre, d’une portion de sphère, d’un cône sont évidents.

- Mais apparaissent autour de la coupole des sortes d’anneaux qu’on appelle en mathématiques des t<u>ores</u>.

- Vont suivre deux images dues à Tom et à ses amis: elles montrent deux tores plus ou moins localement amincis et enlacés.





- Voici d’autres tores, bien connus de ces demoiselles :

- L’ animation qui suit montre des déformations du 2- tore standard débouchant sur l’architecture romaine bien connue où se tenaient les spectacles du cirque :

- http://www.josleys.com/gfx/Tore_CB_01.mov

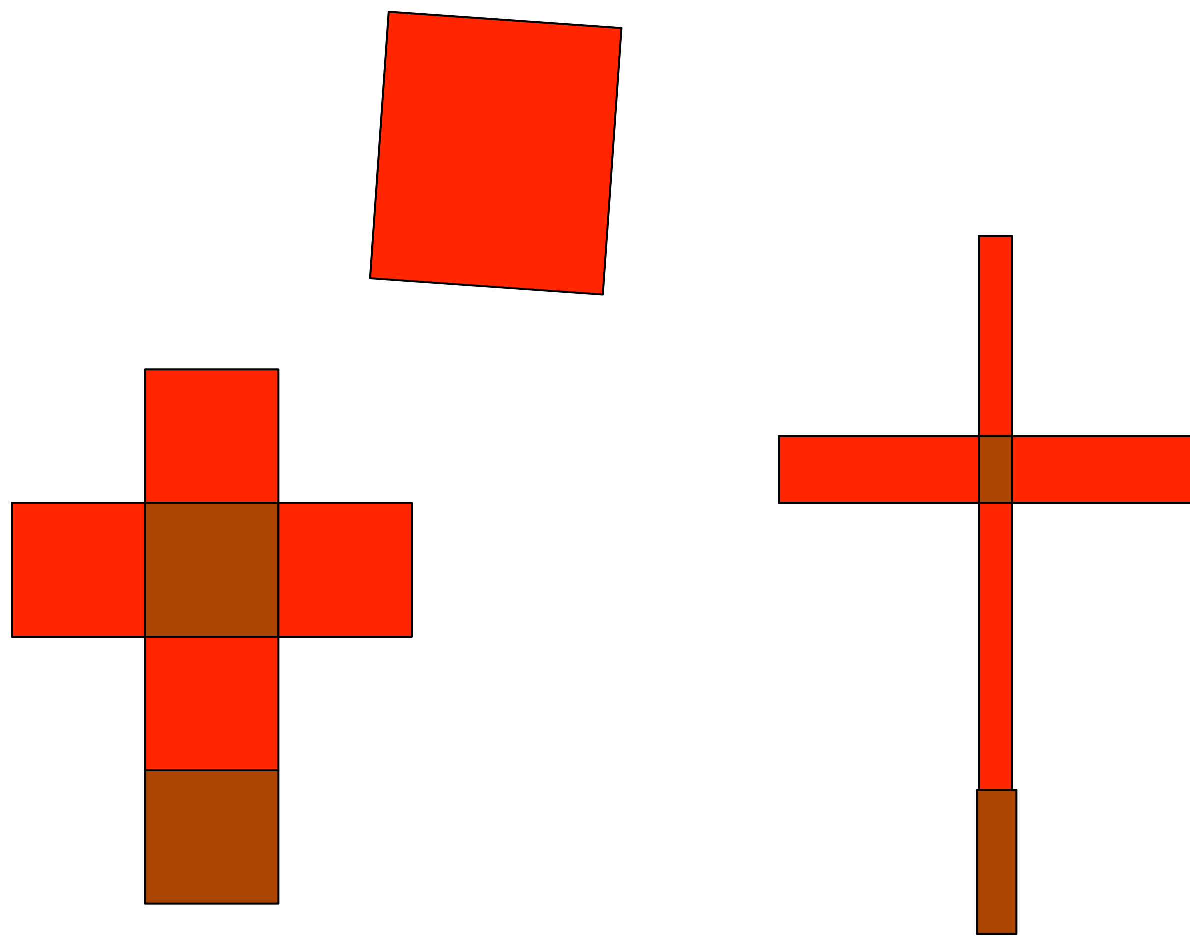
Nîmes

Vérone

- Nous avons oublié un détail: la croix au-dessus de l’édifice.

- Pour la construire, on peut prendre un <u>cube creux</u> ordinaire, ou une boîte d’allumettes, dont on déplie les six faces dans le plan sur lequel repose le cube ou la boîte.

- Libre à nous de déformer ces faces planes comme nous l’entendons. On fabrique ainsi une croix plate.



- Examinons de plus près notre cube. On va l’appeler un 3-cube, car il a trois dimensions : une longueur, une largeur et une hauteur.

- Ses faces, des carrés, sont plates, elles n’ont pas de
- hauteur simplement une longueur et une largeur. Ces carrés sont donc de dimension 2. On va les appeler des 2-cubes.
- Ainsi un 3-cube a pour faces des 2-cubes, 6 en tout.

- Les faces de ces carrés sont des traits, des segments, des portions de courbes. La seule longueur suffit pour le mesurer, ils sont de dimension1. On va les appeler des 1-cubes. Ainsi les faces d’un 2-cube sont des 1-cubes, il y en a 4 en tout.

2-cube

1-cube

- Les faces du 1-cube sont des points, des 0-cubes. Il y a en a 2 en tout.

Ainsi en descendant, on a des 3-cubes, des 2-cubes, des 1-cubes, des 0-cubes.

On peut maintenant au contraire, monter en ajoutant des dimensions. Si on ajoute aux trois dimensions longueur, largeur, hauteur, le temps

- On aura un espace à quatre dimensions, et, dans cet espace, un cube à quatre dimensions, un 4-cube appelé aussi un hypercube. Les faces de ce 4-cube sont des 3-cubes.

- Un très grand peintre du siècle dernier, Salvador Dali, s’entourait de mathématiciens.

  Dali a déployé les faces de cet hypercube, ces faces sont de vrais cubes, pour construire avec elles une vraie croix.

- Sur le tableau, on distingue bien six cubes qui forment la croix, et en arrière, plus cachés, apparaissent deux autres cubes.

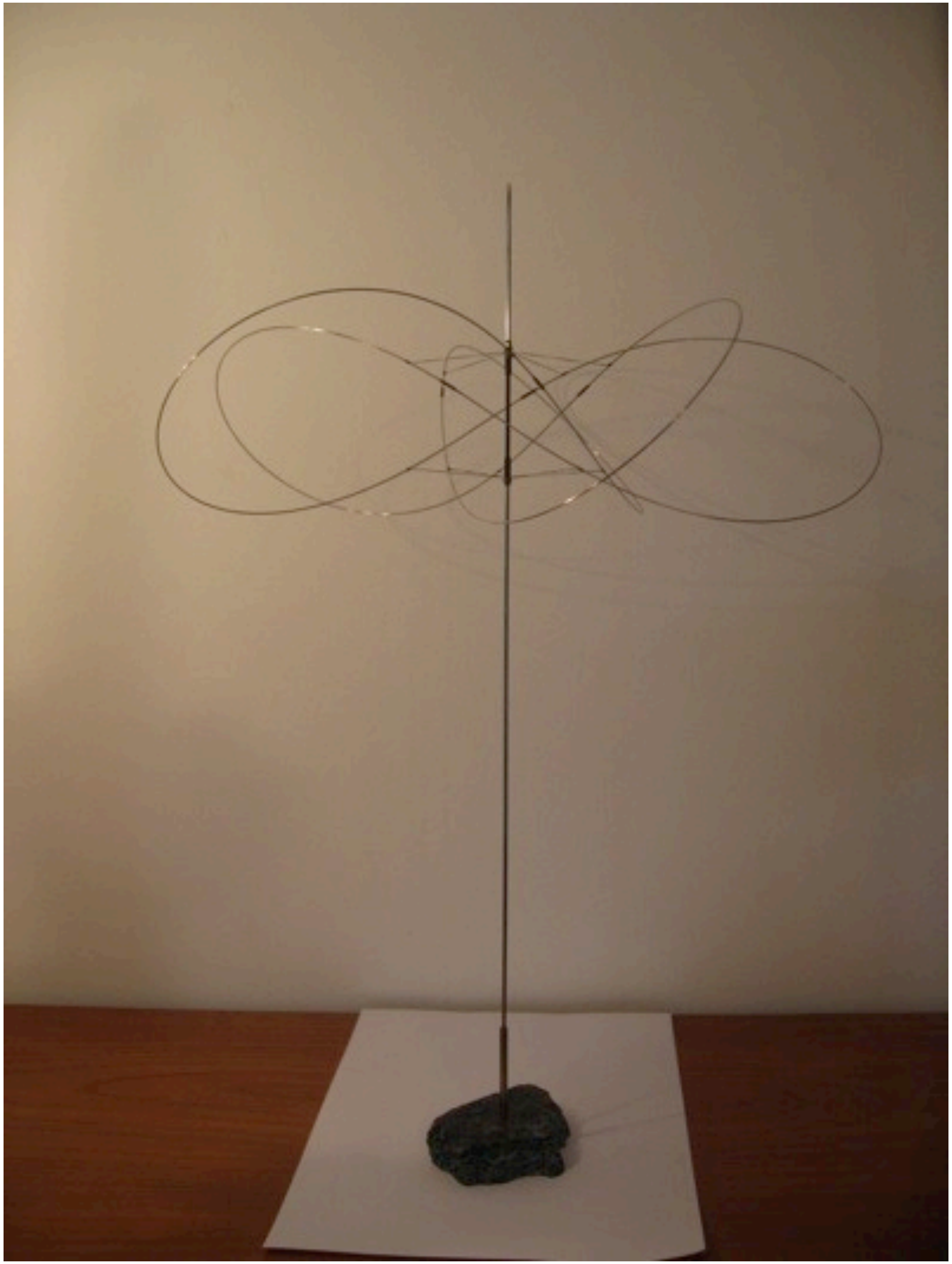
- Pour compter les faces d’un n-cube, qui appartient à un espace à n-dimensions, c’est simple : comme il y a deux faces opposées dans chaque direction, un cube à n-dimensions possède 2n faces, 2n (n-1)-cubes !

- Ainsi le 4-cube possède 8 3-cubes, ils apparaissent bien dans le tableau de Dali.

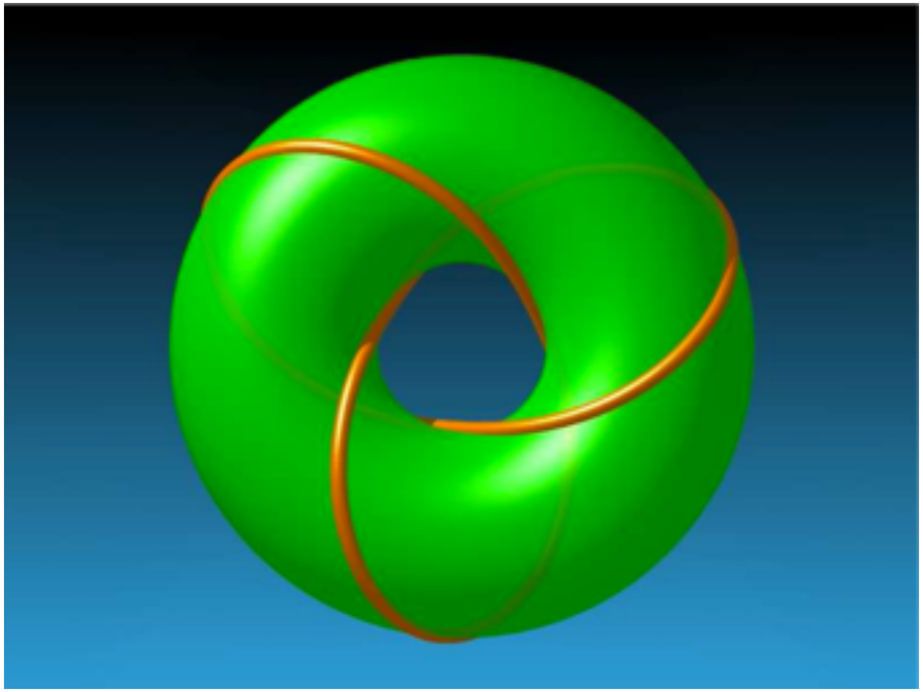
- Retour sur les tores et les nœuds.

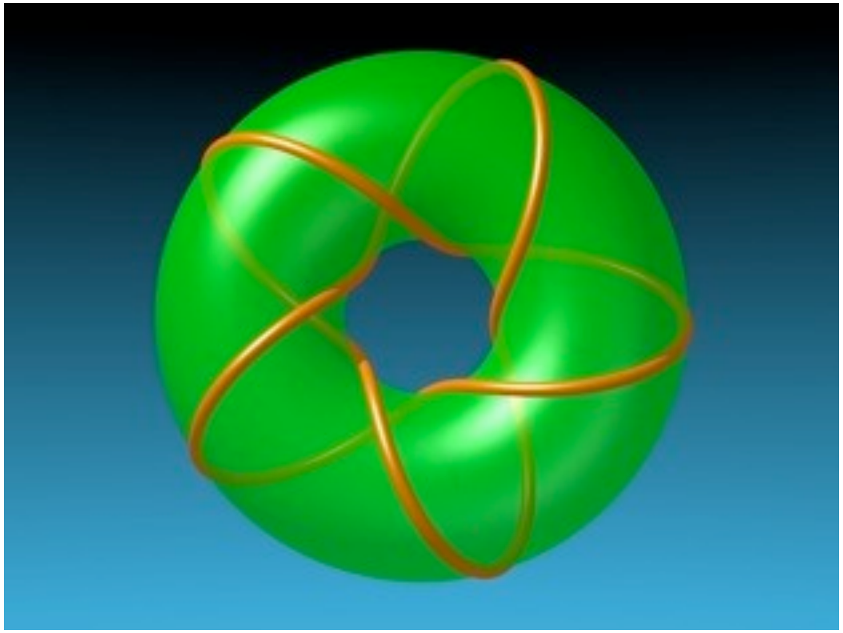
- Voici, réalisés par Philippe Rips, des nœuds à trois et cinq lobes ou feuilles. Un nœud à trois feuilles est appelé un <u>nœud de trèfle</u>.

- Ils présentent ici une parfaite symétrie. En les faisant tourner très rapidement autour d’un de leurs axes de symétrie, on voit apparaître en brillance un tore.

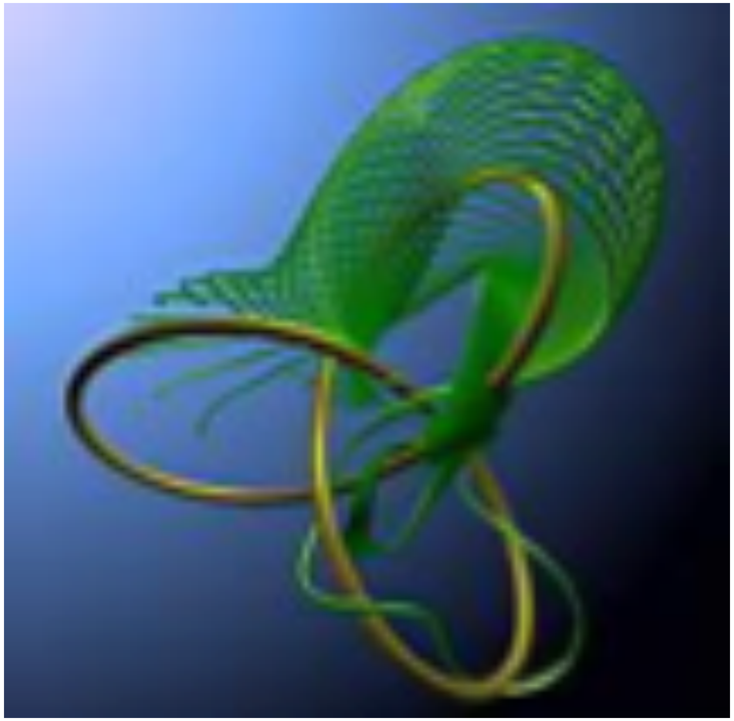


- On montre ici deux images réalisées par Jos Leys, où l’on voit ces noeuds réguliers s’enrouler parfaitement sur le tore.





- Les deux belles images qui suivent, calculées par Jos, montrent un nœud de trèfle en or, autour duquel viennent s’enrouler des fils rouge ou vert.



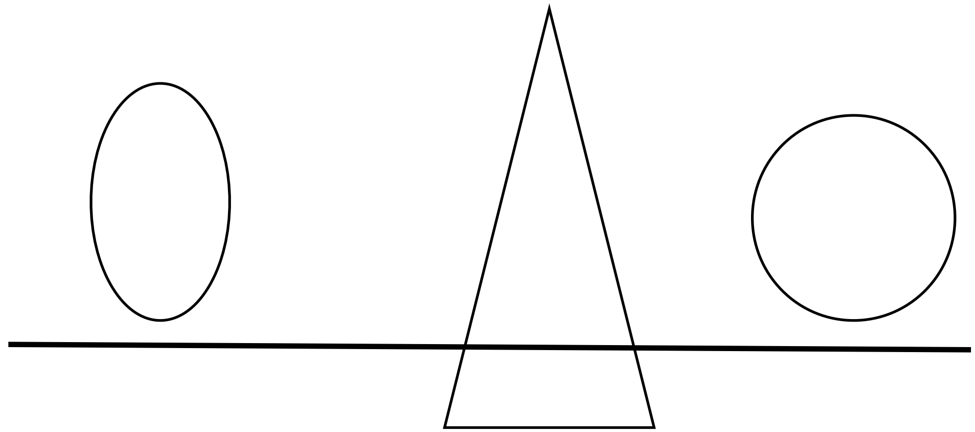
Le Ballet des Trèfles

- http://www.josleys.com/gfx/DanseNDT_01.mov

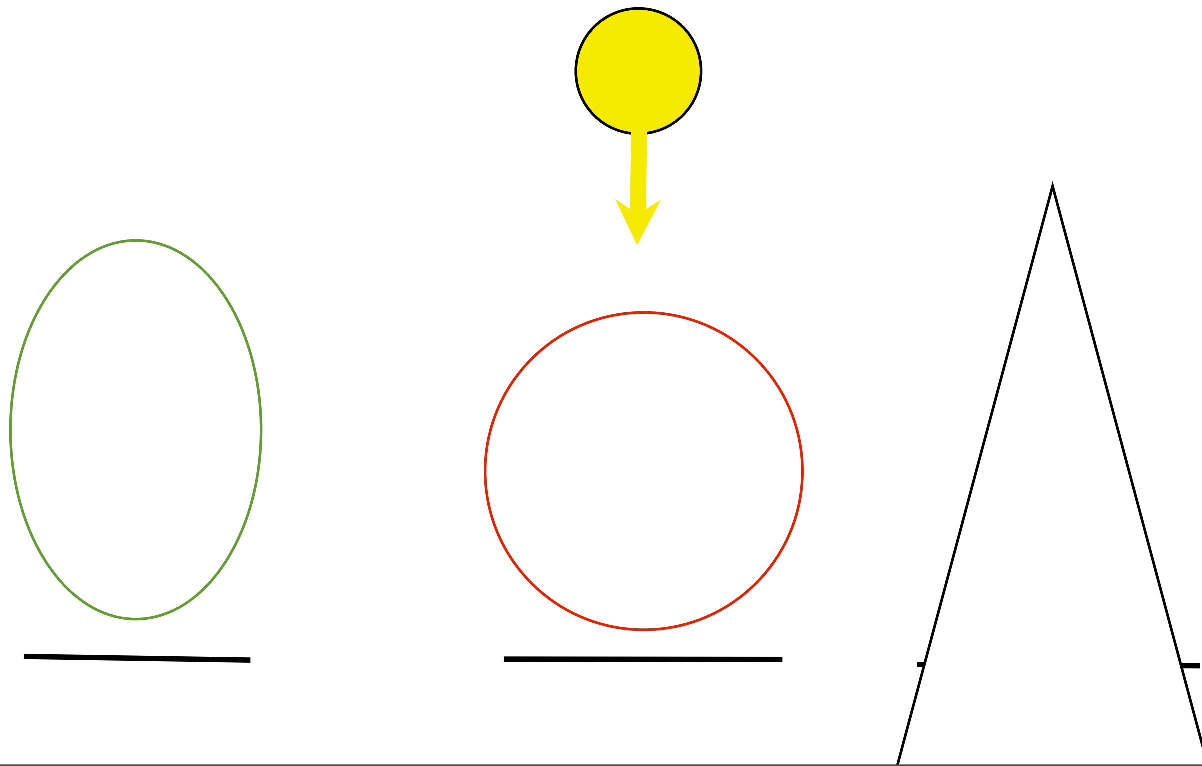
On voit d'abord, comme tout à l'heure, le cercle singulier qui se déploie en un cercle standard dans le plan horizontal.

Puis il tourne sur lui-même autour d'un diamètre horizontal dans notre espace habituel. Il se fige dans un plan vertical, perpendiculaire au plan horizontal.

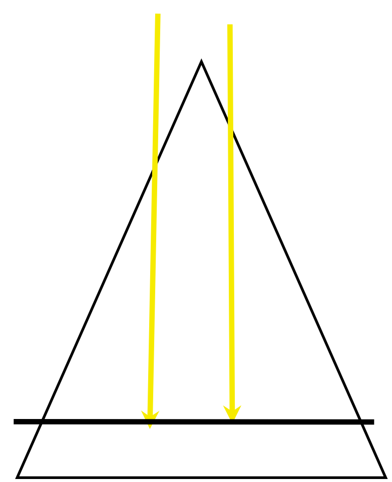
Trois noeuds triviaux dans un plan vertical, obtenus successivement par déformation du premier, un cercle. Le troisième noeud est un triangle : il a trois points singuliers, les sommets du triangle.



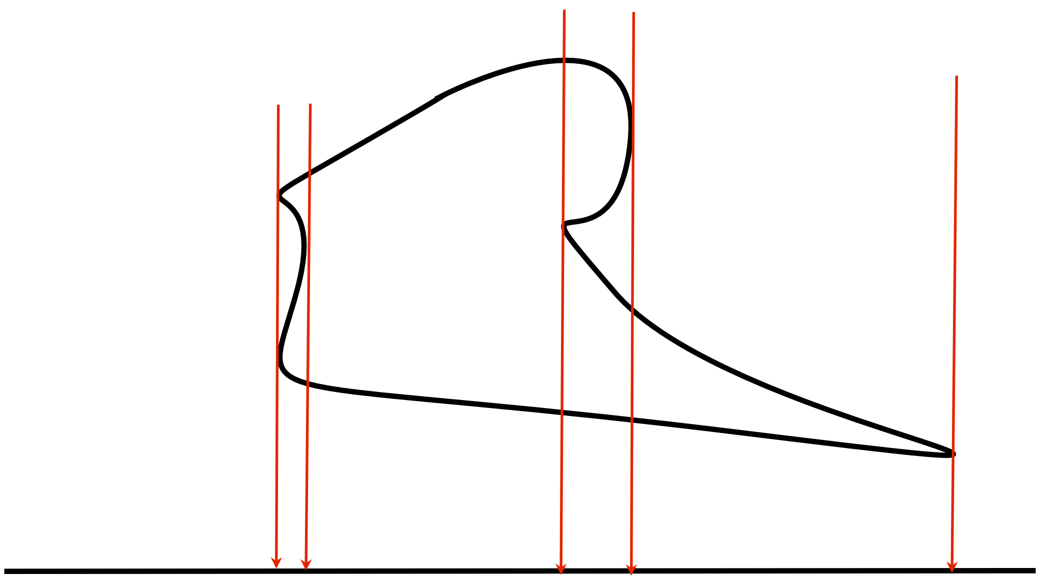
En noir, l’ombre de ces noeuds éclairés par les rayons du soleil situé à l’infini dans le ciel. Ces rayons frappent le plan horizontal du sol perpendiculairement au sol.



Les rayons lumineux définissent la manière dont se fait la projection. Hormis, pour les noeuds pris ici en considération, deux rayons exceptionnels qui ne rencontrent le noeud qu'en un seul point, tout autre rayon qui traverse le noeud le rencontre en deux points qui ont la même ombre, la même image. Ce nombre 2 sera appelé ici le poids de l'application de projection qui applique le noeud sur son image, son ombre, le segment noir.



- Sur les parties convenables d'une forme donnée, le poids d'une application de la forme sur son image est presque partout constant ! C'est encore un théorème.



- On découvre maintenant un nouveau phénomène avec la construction de deux noeuds de trèfle symétriques par rapport à un plan médian. Ce sont deux noeuds qu'on ne peut pas superposer, ils sont différents de par leur orientation.

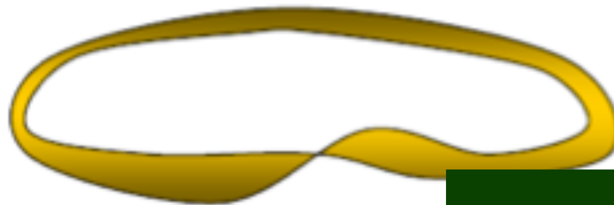
  Sur celui de gauche, le danseur tourne vers sa gauche, le noeud est lévogyre, sur celui de droite, le danseur tourne vers sa droite, le noeud est dextrogyre.

  Comme les noeuds le long desquels peuvent se trouver des atomes, de nombreuses molécules se présentent sous l'une de ces deux formes lévogyre ou dextrogyre.

- En prenant une bande de papier, la vrillant d’un angle de 180°, puis en collant bord à bord les deux parties libres, on obtient ce qu’on appelle un ruban de Möbius.
- Partant d’un point du ruban la tête en haut, on peut parcourir le ruban et revenir au point de départ: on a alors la tête en bas. On dit que le ruban n’est <u>pas orientable</u>, puisqu’en un même point, on a à la fois la tête en haut et la tête en bas.
- Ce qui est aussi remarquable est qu’en suivant le bord du ruban, le trajet parcouru est un nœud de trèfle ! Faites l’expérience !

Figure 3

Figure 4



http://www.josleys.com/Canon/BachCanonL_final.mov