Comme le précédent intitulé ***Bonne Année***, ce document entend n’être qu’un exemple de l’emploi des œuvres artistiques pour initier les auditeurs à certains contenus de l’univers des mathématiques.

Le jeu de l’interactivité conduit souvent à introduire ou à approfondir un tantinet certaines notions.

Si, semble-t-il, ***Bonne Année*** est bien accepté par les élèves depuis le CM1 jusqu’à la quatrième, ce document-ci s’adresse également à ces dernier élèves, ainsi qu’aux élèves de 3e et seconde. On y voit apparaître deux démonstrations fort simples.

*Vous ne le croirez jamais !*

# Un

# *Art*

# *T*rès *N*ouveau

# La Pâtisserie

# Mathématique

**Ou**

**pourquoi**

**Chocolatiers & Pâtissiers**

**sont**

**Professeurs de Mathématiques**

# Gourmands, s’abstenir !

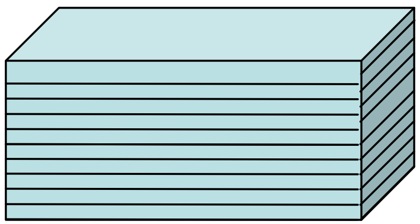
# L’Art du Millefeuille

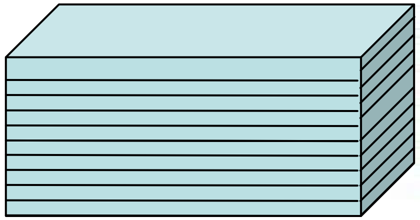
Vous, qui êtes géomètre pâtissier, ou pâtissier géomètre, ces millefeuilles sont, vus de loin d'abord, des parallélépipèdes. Ils pourraient être taillés aussi bien en forme de cube, de cône, de prisme, de sphère, ou en un tout autre volume !

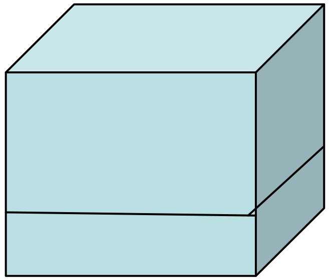
Notez que les feuilles de nos millefeuilles sont ici planes, et, propriété caractéristique,

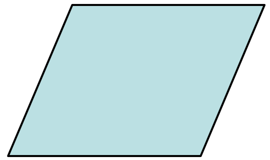
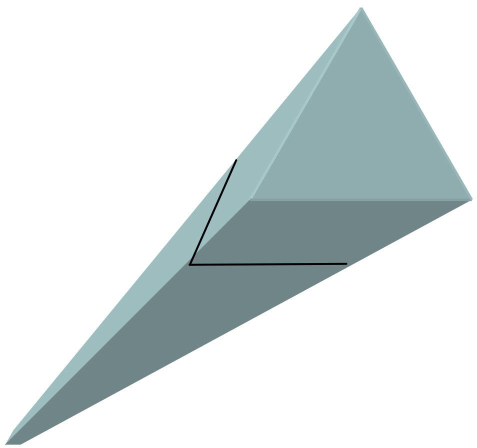
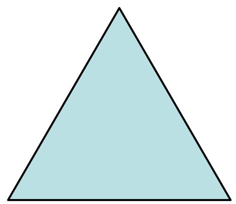
ne se coupent pas !

- si le volume est un parallélépipède, les feuilles sont des rectangles

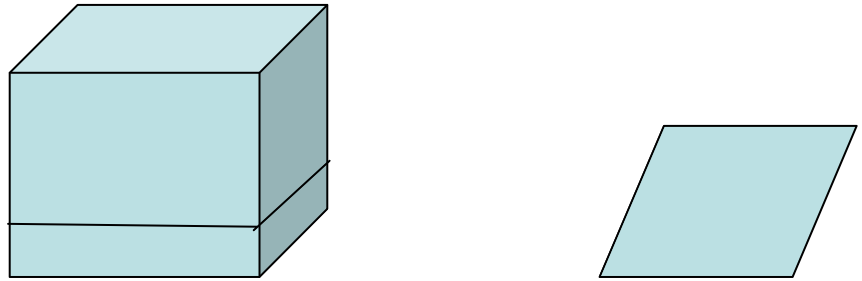




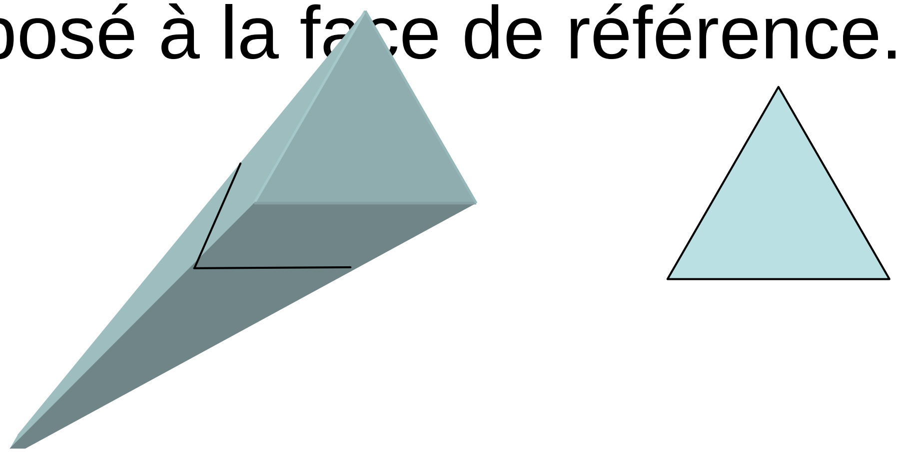



- si le volume est un cube, les feuilles sont des carrés

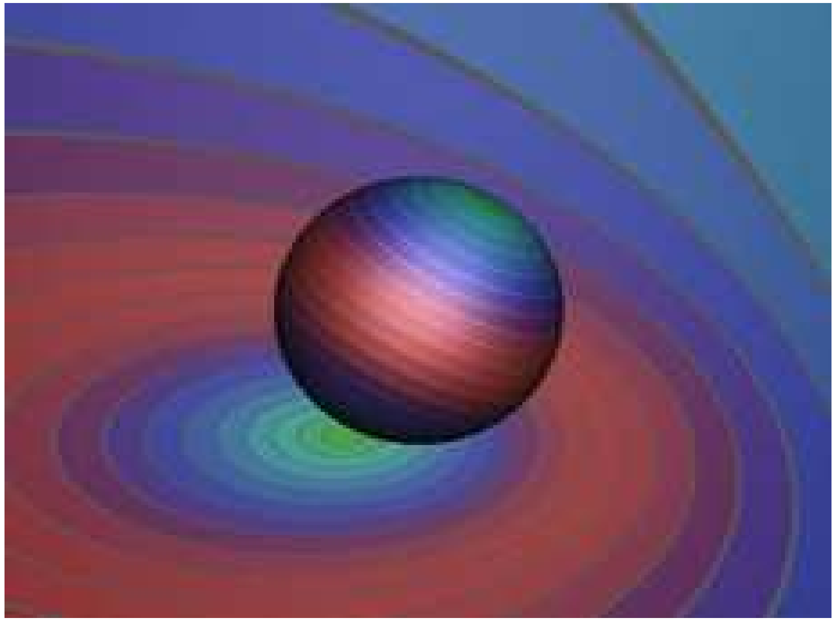


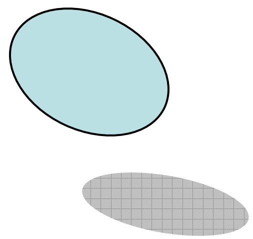
- si le volume est un cône de base triangulaire, les feuilles, choisies pour être parallèles à une base du cône, sont des triangles plans de plus en plus petits au fur et à mesure qu’on s’approche du sommet du cône, opposé à la face de référence.



Ce sommet est un point, dit point singulier, en lequel la feuille, le triangle donc est dégénéré.

- si le volume est une *boule* (comme la terre, une orange, mieux une bouchée en chocolat !), les feuilles sont des *disques* plats (comme des pièces de monnaie infiniment minces), dégénérés en deux points singuliers respectivement situés en des pôles nord et sud de la sphère.





- Les volumes que nous avons considérés sont des domaines à <u>trois dimensions</u> car on peut localement les mesurer par une hauteur, une longueur, une largeur.

Par contre, carrés, rectangles, disques sont des domaines de <u>dimension 2</u> seulement, car ils n’ont pas de hauteur.

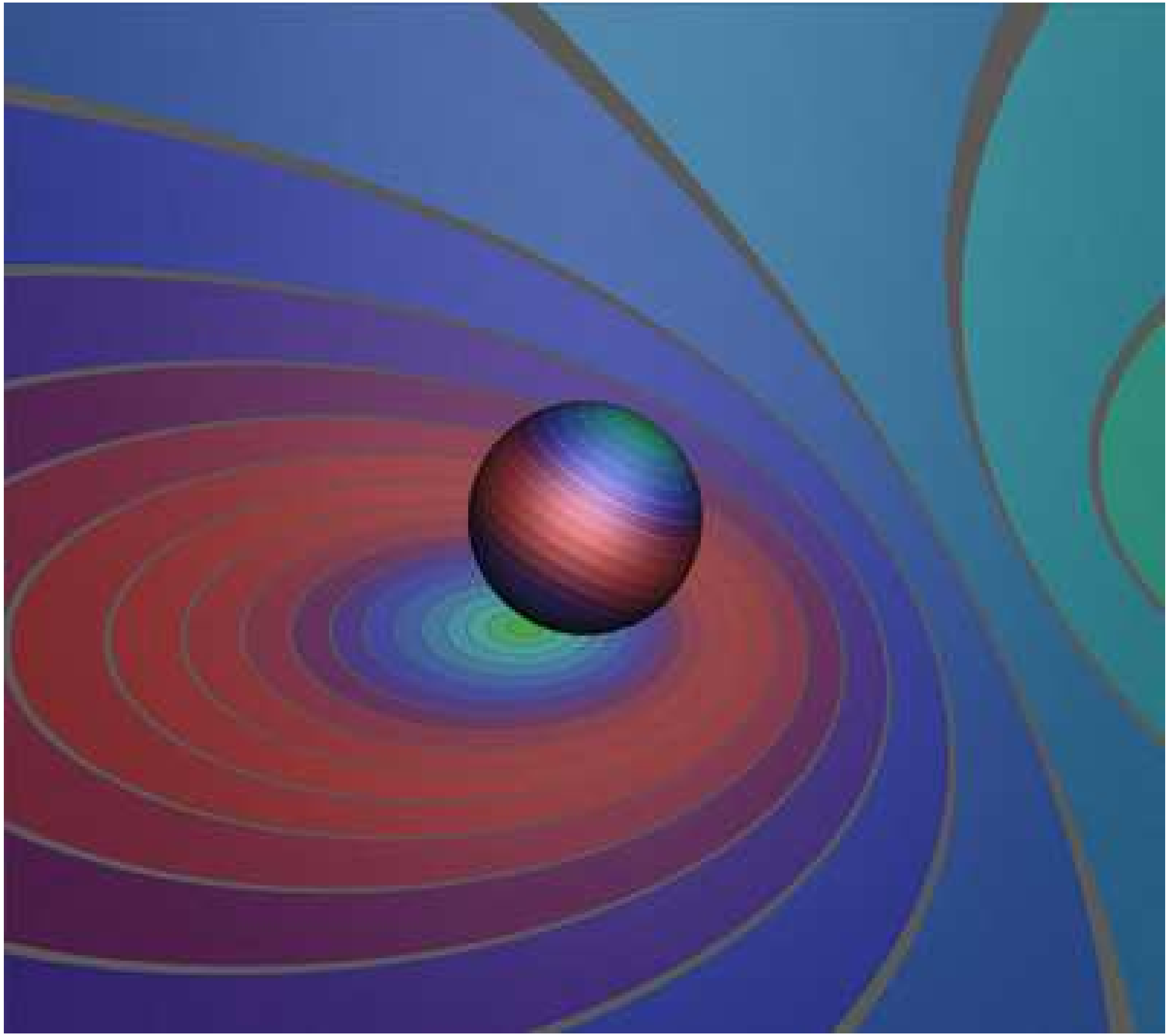
Quant aux *éléments de courbe*, de fils infiniment minces, qu’ils soient rectilignes comme les traits droits ou non, ils sont de <u>dimension 1</u> car la seule longueur suffit pour les mesurer.

Quant aux points, ils sont de <u>dimension 0</u> puisqu’on ne peut pas leur attribuer une mesure autre que nulle.

- Sur les dessins, le nombre de feuilles présentes est fini. Ces dessins ne correspondent pas à la vision des mathématiciens pour qui les feuilles, infiniment minces, infiniment proches les unes des autres, sont en quantité infinie, serrées les unes contre les autres de sorte qu'elles remplissent complètement les volumes considérés.

- Les mathématiciens recherchent l'universalité de leurs conceptions et de leurs affirmations. Ils généralisent.

A votre avis, les carrés et autres domaines à deux dimensions, appelés  surfaces ou éléments de surface, peuvent-ils être feuilletés eux aussi ?



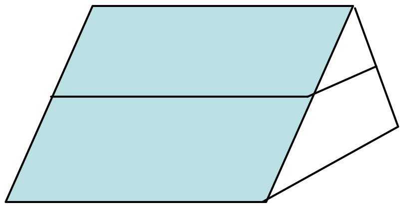
**La projection stéréographique de la sphère, vue par Tom Banchoff  et ses amis**

- Vous avez sans doute tous la réponse, Oui !, il suffit :

- de penser à remplir un carré par des traits parallèles, traits qui sont des éléments de fils infiniment minces, fils qu'on appelle des *courbes*, qu'ils soient rectilignes ou non.

- ou bien, comme on le voit sur le tableau que nous allons commenter tout à l'heure, de tracer sur une *sphère* (la peau infiniment mince de l'orange) une infinité de cercles parallèles entre eux, ceux aux pôles étant dégénérés en ces points singuliers.

• Prenons maintenant à nouveau un prisme que nous allons feuilleter par des rectangle parallèles à une des faces allongées. On voit que la feuille dégénère en l'arête du prisme opposée à la face, arête qui est un élément de courbe rectiligne, donc de dimension 1 :



Vous connaissez maintenant le premier Enoncé du Pâtissier:

*Les volumes et objets habituels de dimension 3 peuvent être feuilletés par des domaines de dimension 2, dégénérés en des points singuliers ou en des lignes singulières.*

Souhaiteriez-vous proposer une ou des généralisations de cet énoncé ?

- Quelques mots sur la sphère que nous venons de voir sur un tableau fait par Tom Banchoff et ses amis. Elle est placée sur un écran plat : les pôle nord et sud sont bleus ou bleus-verts comme les glaces de l'Artique et de l'Antartique. Il fait plus chaud au milieu de la sphère, comme chez nous.

Une source de lumière est placée au pôle nord, de sorte que sur l'écran plat on voit les images bleues des glaciers, et entre les deux l'image rouge du milieu de la sphère: l'image ou l'ombre d'un cercle est un cercle, ce que nous allons expliquer dans deux cas particuliers simples.

Cette image de la sphère sur l'écran s'appelle la projection stéréographique de la sphère.

- Cette projection sur le sol des trajets tracés sur la sphère a été introduite dans le courant du 1er siècle par le mathématicien astronome et géographe Ptolémée. Ce procédé a été utilisé pour fabriquer des cartes géographiques.

- Le grand Euler, l’empereur des mathématiques, qui vivait au 18e siècle, a trouvé les outils pour bien travailler cette projection.

- Pour voir simplement pourquoi d’abord l’ombre d’un cercle tracé sur la sphère, situé dans un plan parallèle à l’écran, est un cercle sur l’écran, il suffit d’en référer au « théorème » de Thalès, qui est moins un théorème que l’énoncé d’une simple observation d’optique géométrique, fondamentale.

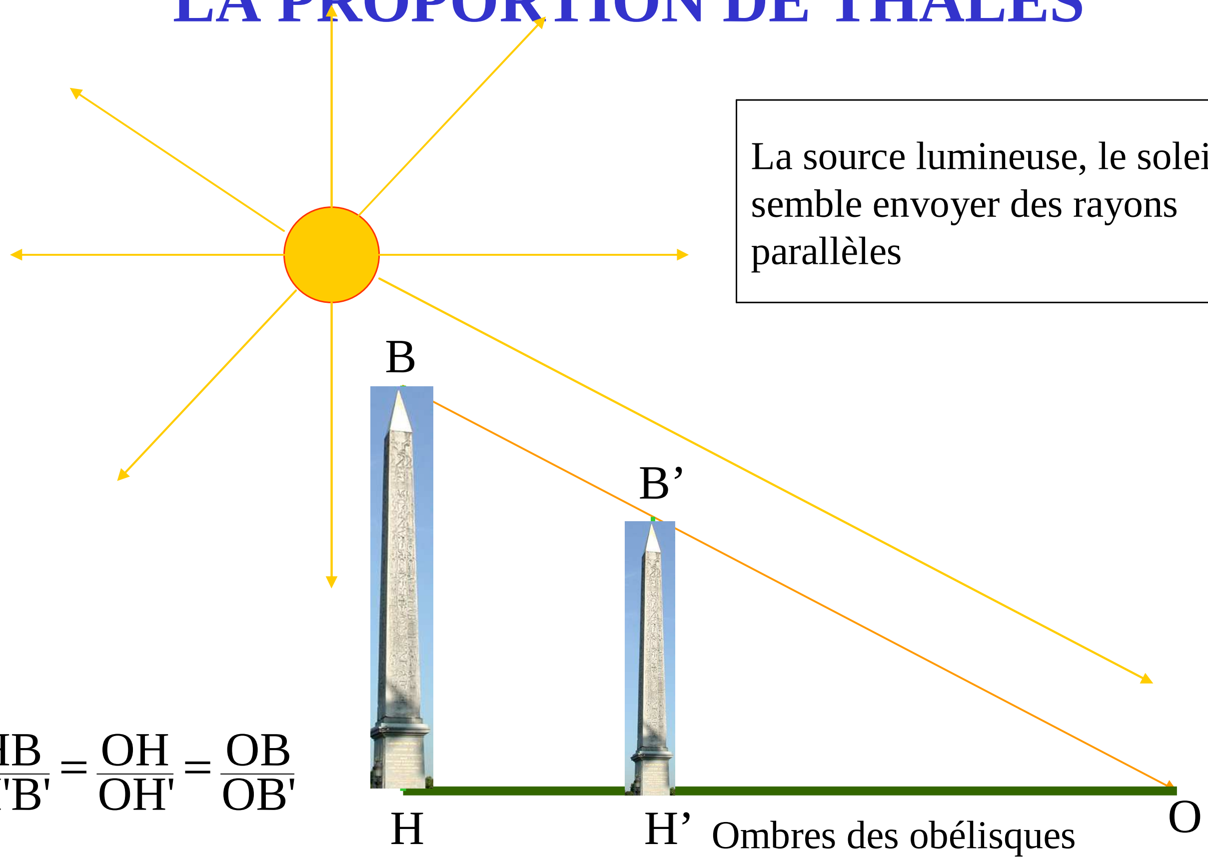
- Mais nous allons voir d’abord ce qui suggère l’emploi de ce théorème dont nous rappelons l’énoncé :

*Éclairés par le soleil, les hauteurs des obélisques sont en même proportion que les longueurs de leurs ombres*

# OPTIQUE VERSUS GÉOMÉTRIE

## LA PROPORTION DE THALÈS

La source lumineuse, le soleil, semble envoyer des rayons parallèles




$$\frac{HB}{H'B'} = \frac{OH}{OH'} = \frac{OB}{OB'}$$

- La formulation précédente de l’énoncé de Thalès est, quoique imagée, la formulation classique, de nature statique, inanimée.

- Une formulation moderne est du genre dynamique, animée, comme celle-ci:

*Eclairé par le soleil, une translation de l’obélisque, ou sa dilatation en hauteur laisse invariant le rapport entre sa hauteur et la longueur de son ombre.*

- On ne dira jamais assez le rôle de la lumière dans le développement de la vie : elle nous apporte l’énergie première, elle nous permet de voir.

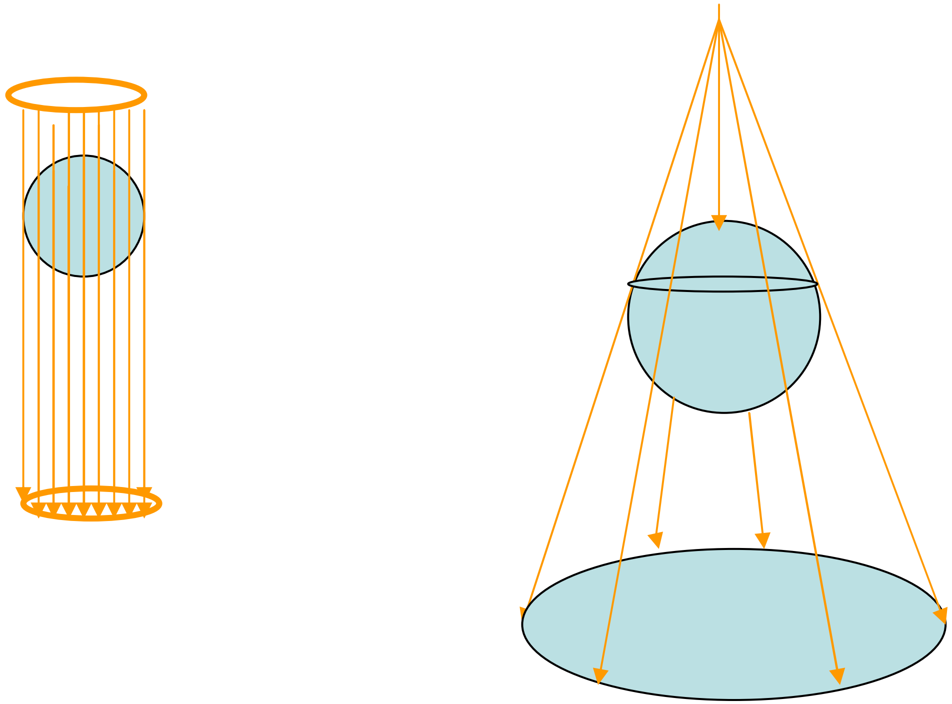
Le soleil et sa lumière ont occupé une place très importante auprès des prêtres-savants égyptiens.

L’érection de l’obélisque, un rayon de soleil figé selon les Héliopolitains, dont le pyramidion est recouvert de feuilles d’or, en porte témoignage

- Le premier obélisque semble avoir été érigé du temps de Pépi 1$^{er}$ (autour de – 2250). Thalès, qui a passé son enfance auprès des prêtres -savants égyptiens, a vécu autour de -600. Entre -2250 et – 600 il doit bien y avoir eu quelques progrès scientifiques. Je conjecture que Thalès n’a fait qu’importer le fameux énoncé.

- Par ailleurs, qu’a-t-on pu observer lorsque le soleil était au zénith, à l’aplomb de l ‘axe de l’obélisque ?

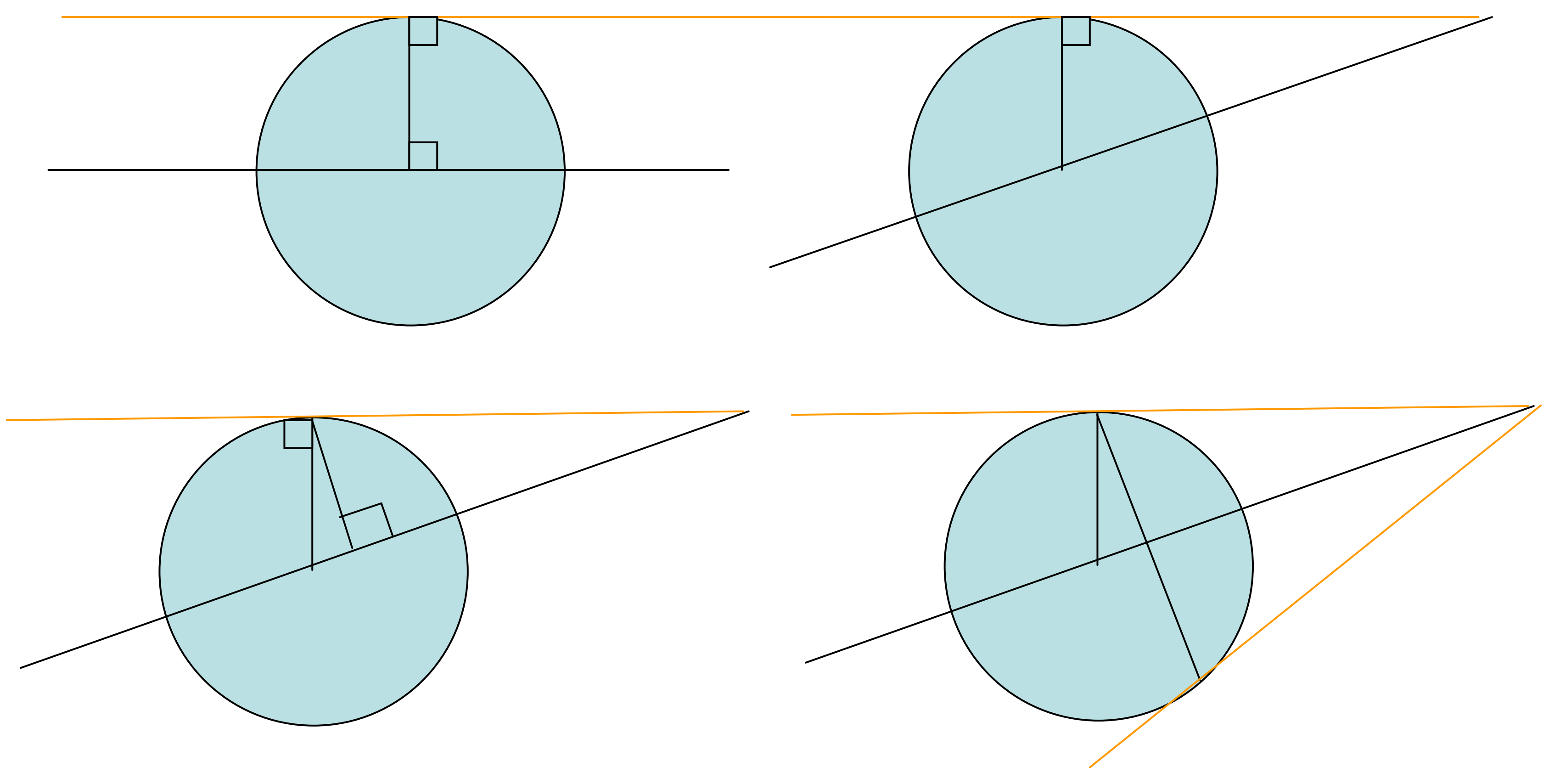
- Remplaçons l’obélisque par une sphère, et rapprochons de la sphère la source lumineuse, située à la verticale du centre de la sphère :



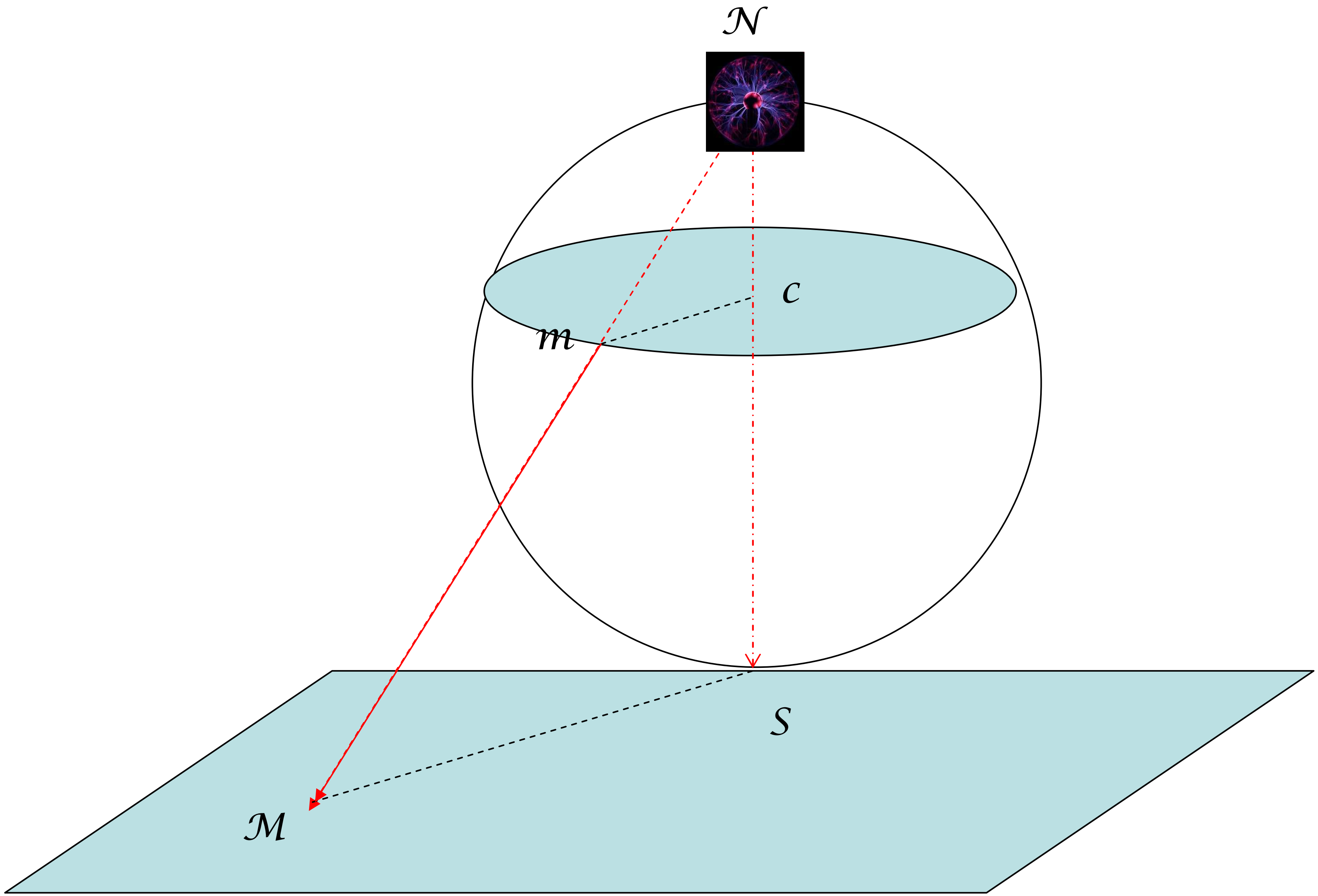
- Le cylindre de lumière devient un cône de lumière tangent à la sphère selon un cercle. Il rencontre le plan de la terre selon un autre cercle. Chaque cercle de la sphère, appelé un parallèle lorsqu’il est situé dans un plan parallèle à l’équateur et au sol-écran, a pour ombre un cercle sur le sol.

- Pourquoi un cône de lumière tangent à la sphère ?

- La réponse s'établit d'après cette suite d'images



- Et voici maintenant ce qu'il advient lorsque la source lumineuse atteint le pôle nord :



R est le rayon de la sphère, 2R son diamètre.

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $c$ est à la distance

$$c\mathcal{N} = \text{h du pôle nord } \mathcal{N}.$$

La longueur de son rayon est $\mathcal{C}m$ = r.

Le théorème de Thalès affirme l'égalité des proportions :

$$cm \;/\; c\mathcal{N} = \mathcal{SM} \;/\; \mathcal{SN}$$

$$r / h = \mathcal{SM} \;/\; 2R$$

Quel que soit le point $m$ du cercle $\mathcal{C}$, son ombre $\mathcal{M}$ sur le plan reste à la distance constante

$$\mathcal{SM} = 2R\ r/h$$

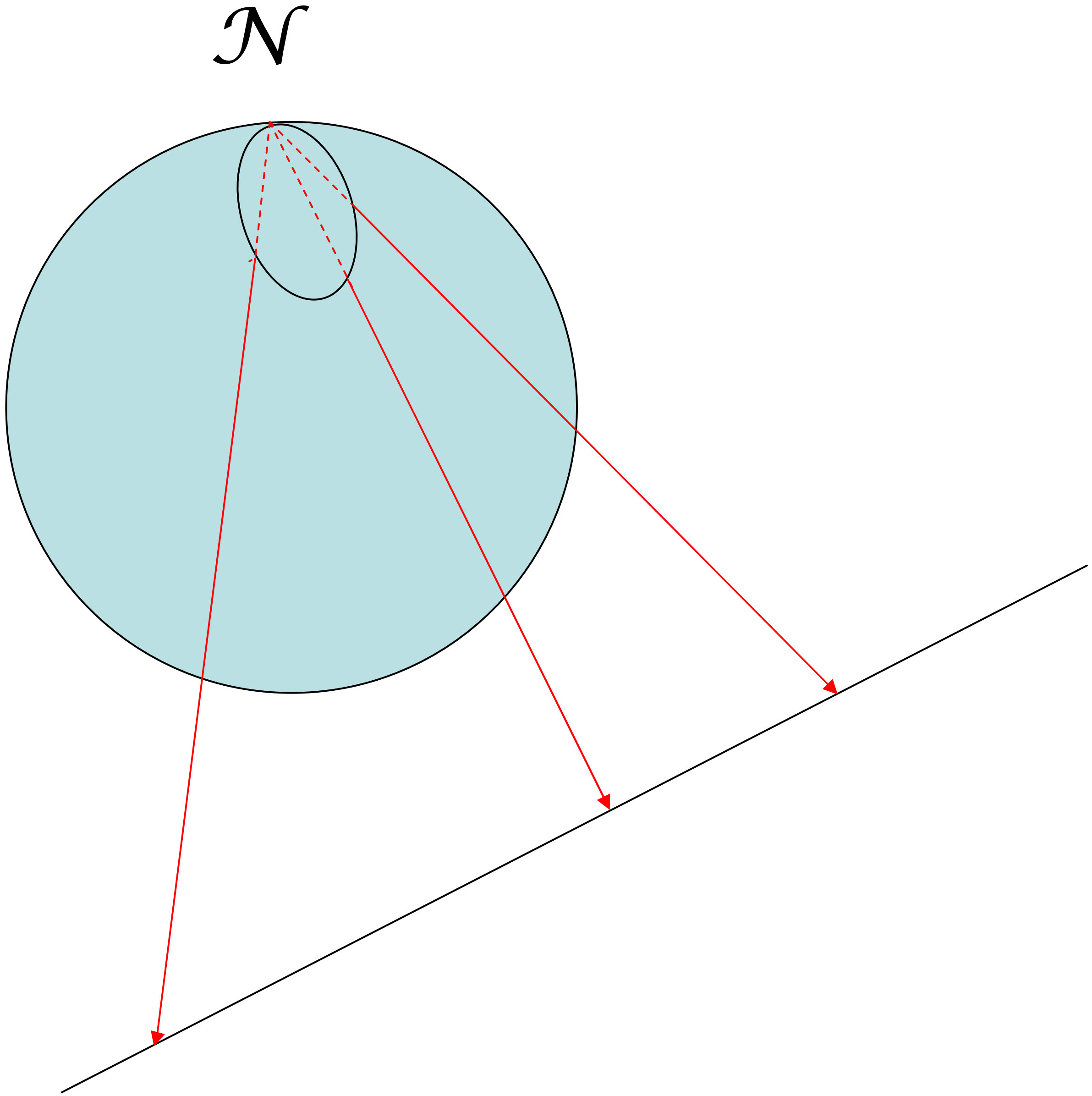
du pôle sud $\mathcal{S}$. Il décrit donc à son tour un cercle quand $m$ se déplace sur le cercle $\mathcal{C}$.

La démonstration ne dépend évidemment pas de la position de la source sur l'axe vertical passant par le centre de la sphère.

Un cercle se situe dans un plan. Si maintenant le cercle C passe par le pôle Nord où se trouve la source lumineuse, le plan qui contient le cercle contient donc la source lumineuse.

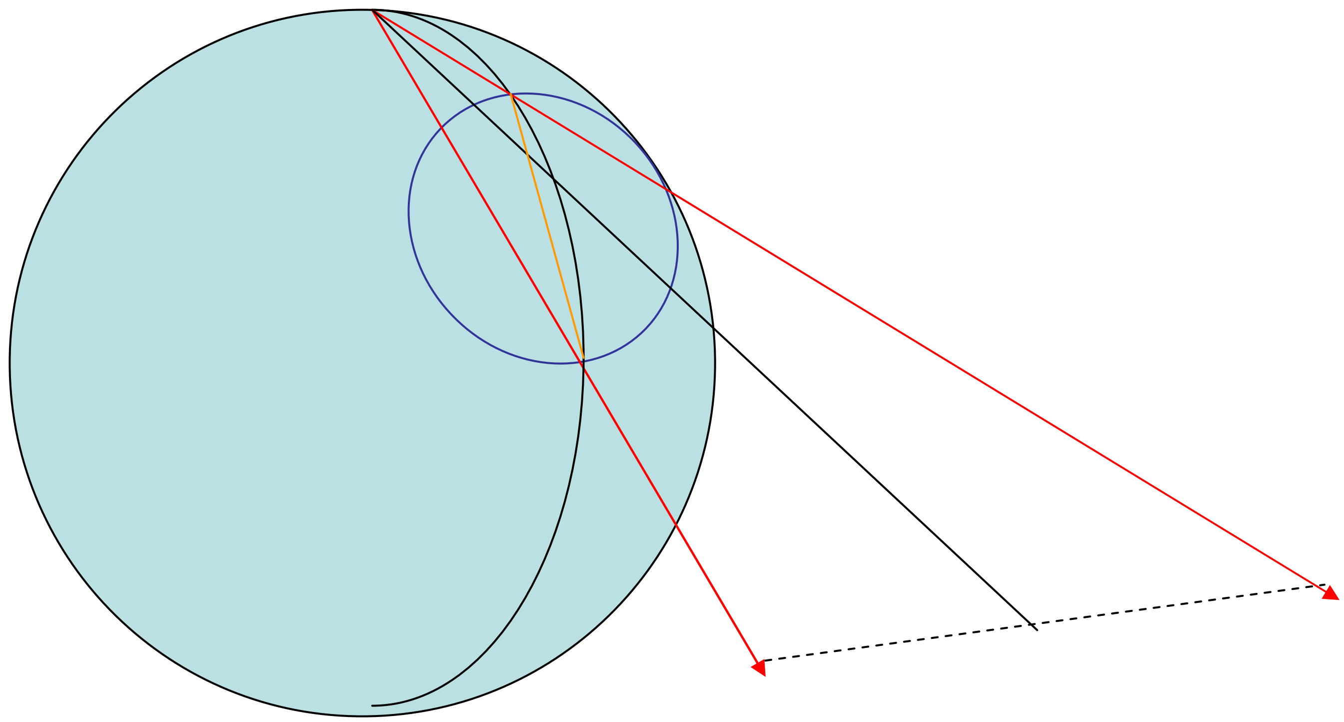
Tous les rayons issus de la source et passant par les points du cercle restent dans ce plan, qui coupe le plan de l’’écran selon une droite.

L’ombre d’un tel cercle est une droite. Elle passe par le pôle sud si le cercle est un méridien, un grand cercle passant par les deux pôles.

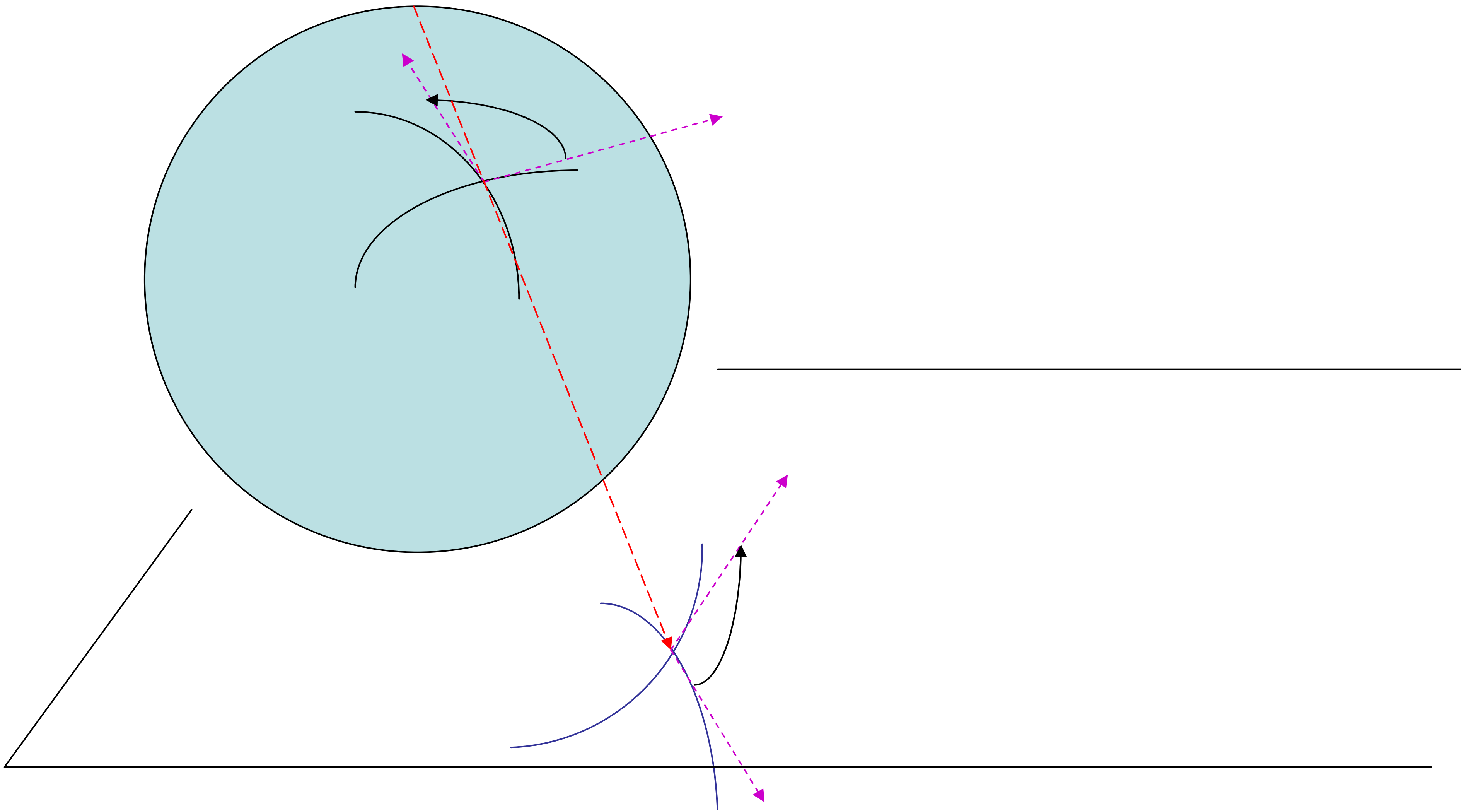


$\mathcal{N}$

Si le cercle tracé sur la sphère n’est ni un méridien, ni un cercle parallèle au plan de l’écran, on parvient au résultat cherché en se servant du cône tangent à la sphère le long du cercle, également du théorème de Thalès.



- Une autre propriété remarquable de cette projection est la suivante: l’angle entre deux courbes tracées sur la sphère (l’angle de leurs tangentes) a la même mesure



que l’angle entre les ombres sur l’écran de ces deux courbes.

C’est la raison pour laquelle cette projection stéréographique a été utilisée pour la fabrication des cartes géographiques: l’angle entre deux chemins sur la terre est le même que l’angle entre leurs images sur la carte.

Une transformation, comme cette projection, qui conserve les angles est appelée une *transformation conforme.*

- Avant de quitter ces feuilletages, que j'appellerai des feuilletages fins, voici encore quelques exemples de ces feuilletages sur des objets également importants en mathématiques, les <u>*tores*</u>, matérialisés par exemple la sous forme d'anneaux, de chambres à air de vélos, de bouées de sauvetage, ou encore, chez nos amis pâtissiers, de donuts et de Paris-Brest !

Mais voici d’abord quelques illustrations de tores faites par Tom Banchoff et ses amis.

Ces tores sont ici plus moins effilés, et enlacés.

Ils permettent de comprendre l’organisation interne de la sphère dans l’espace à quatre dimensions.

Ces tores sont creux. Un tout petit domaine du tore au voisinage d’un point est du genre disque plat, de dimension 2. Le tore est une surface de dimension 2.