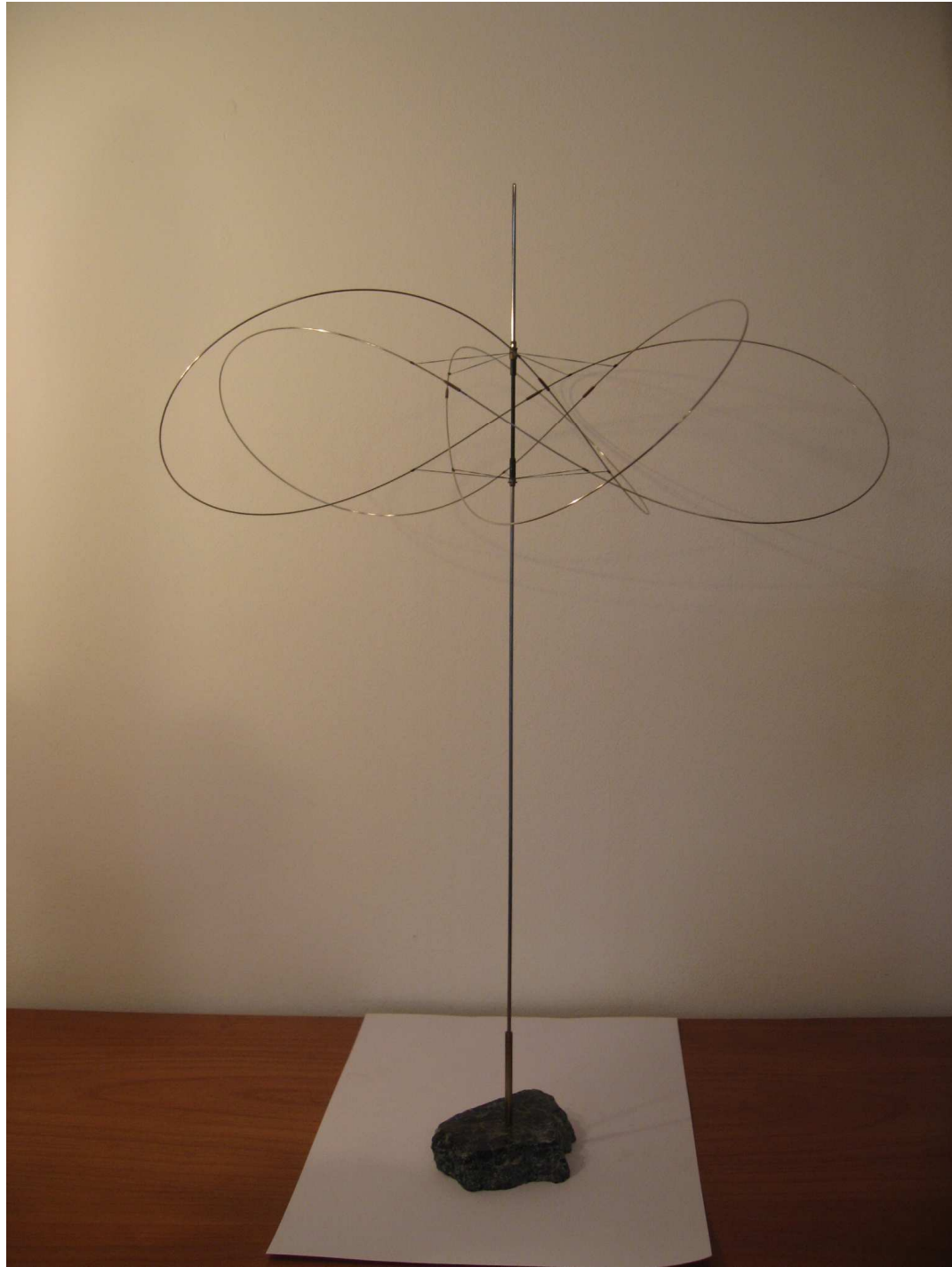


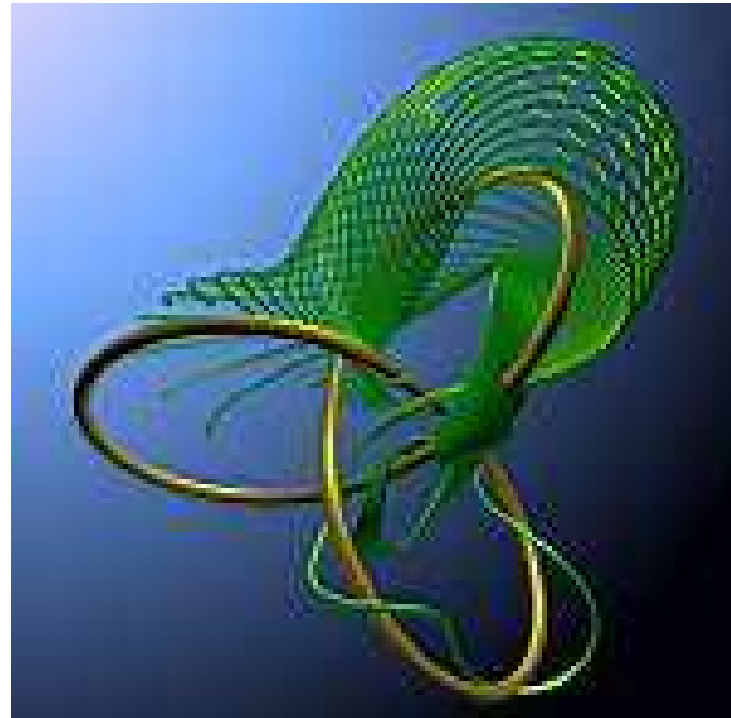
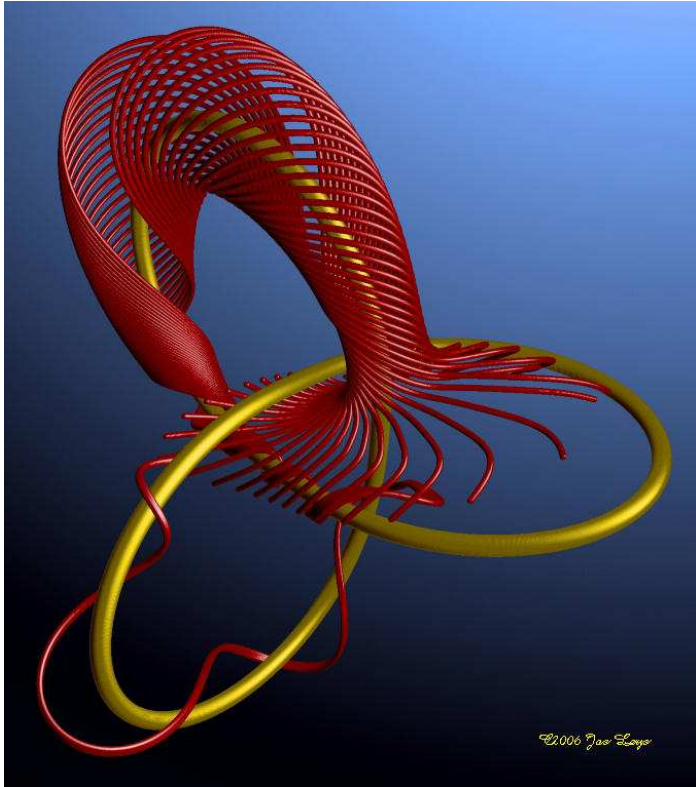
- Une courbe qui se referme sur elle-même, un fil dont les extrémités sont confondues, est appelée en mathématiques un nœud.

Avec cette définition, les cercles par exemple sont des nœuds, plats, fort simples bien sûr.

Philippe Rips a matérialisé deux nœuds un peu moins simples, un nœud à trois lobes, on l'appelle un *nœud de trèfle*, et un nœud à cinq lobes :

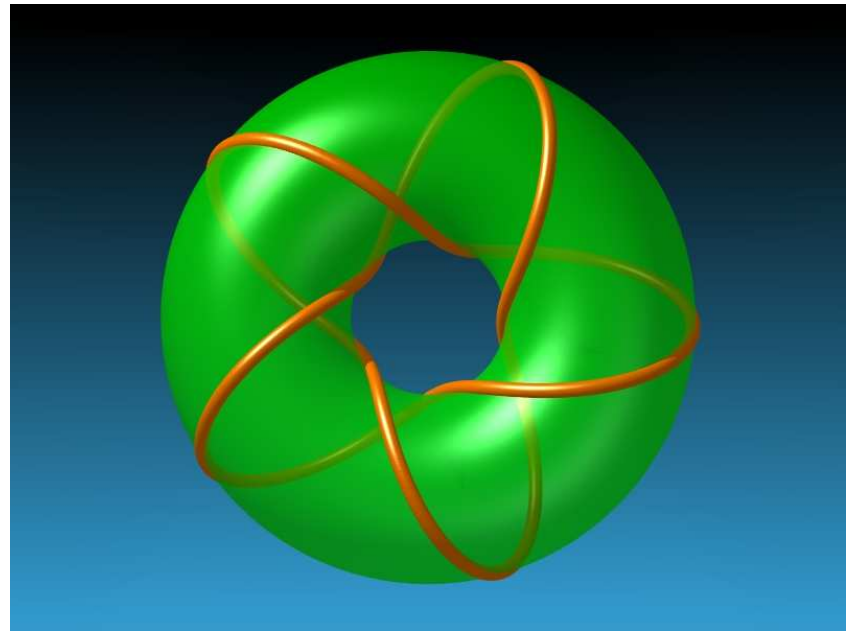
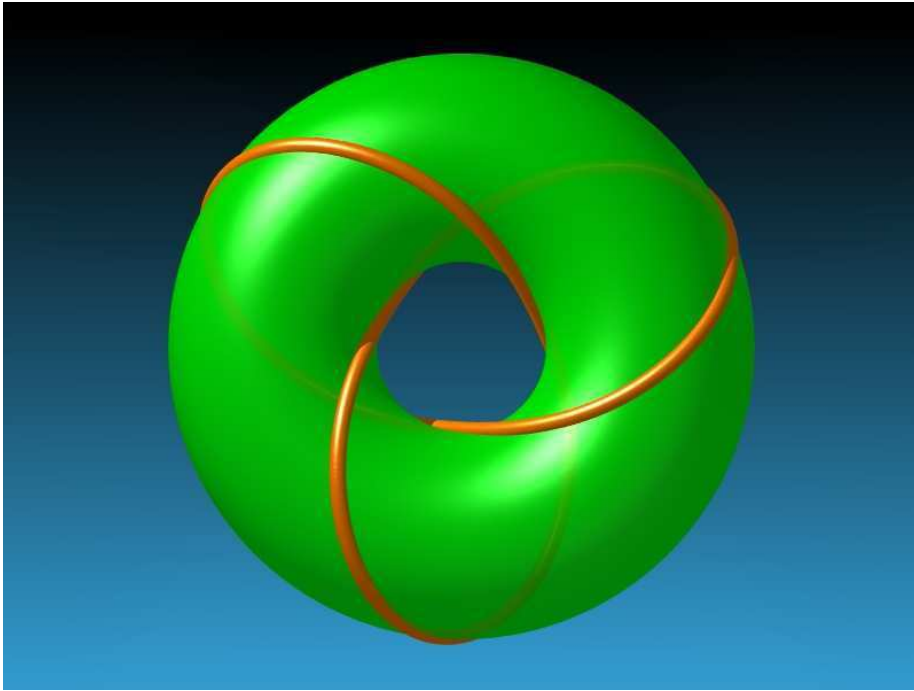


- Les deux belles images qui suivent, calculées par Jos, montrent un nœud de trèfle en or, autour duquel viennent s'enrouler des fils rouge ou vert.



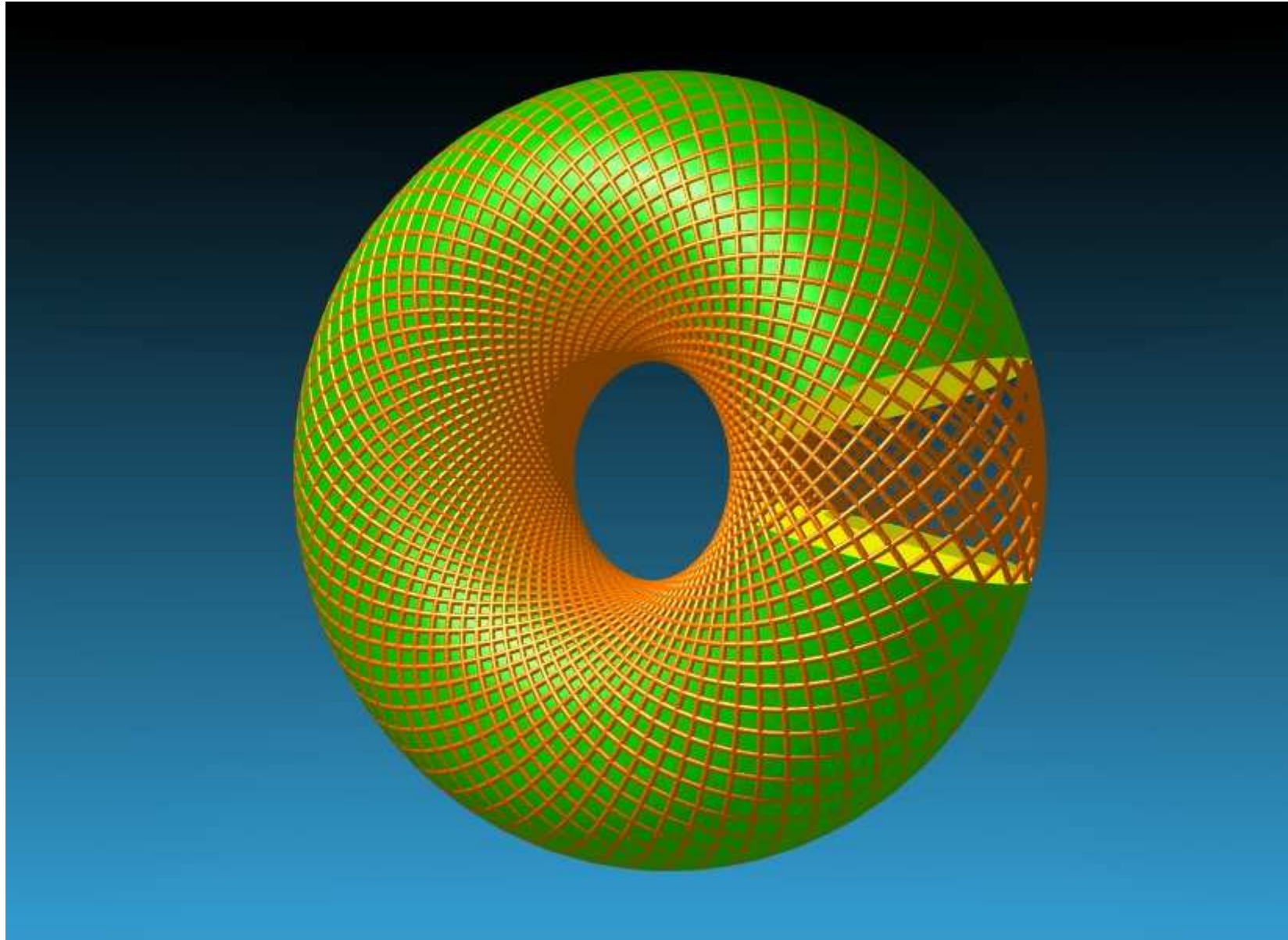
- Si l'on fait tourner très rapidement par exemple le nœud pentagonal autour de son axe de symétrie, on a l'impression de voir un tore en brillance.

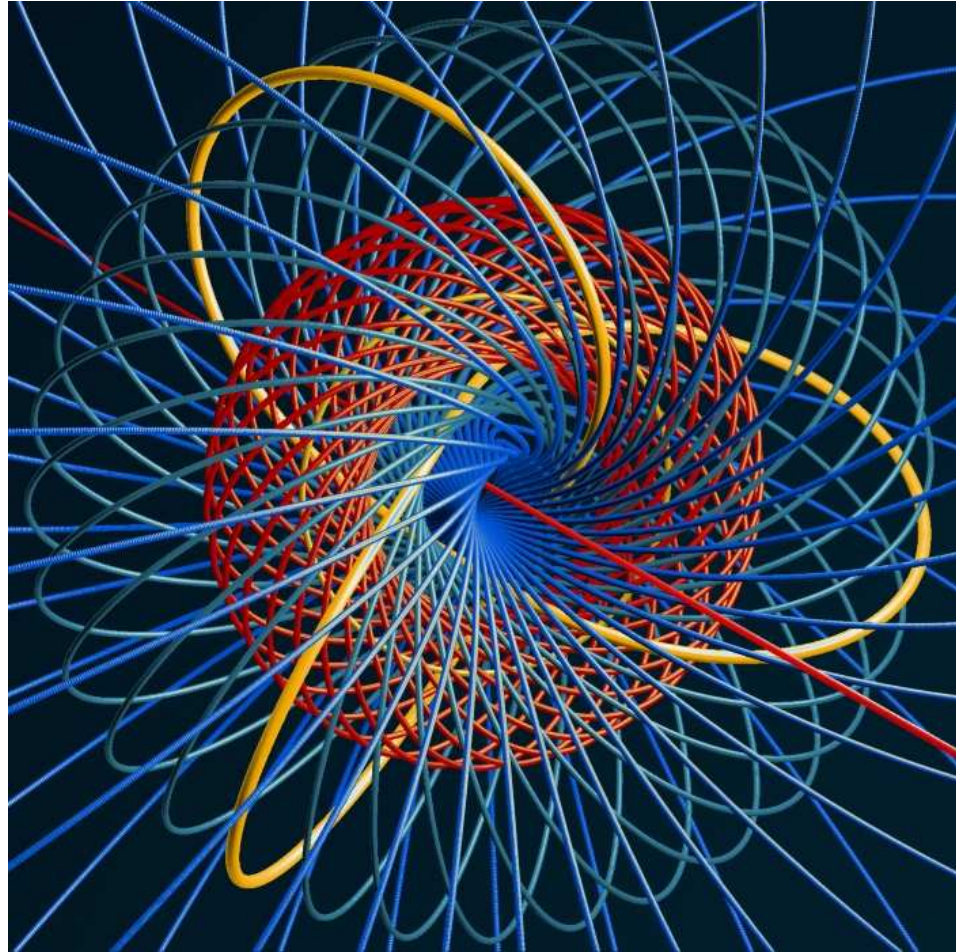
Sur ce tore, on peut enrouler ces nœuds réguliers de trèfle et pentagonal. Les images sont de Jos Leys.



On peut plus généralement les feuilletter avec ces nœuds.

Voici, toujours de Jos Leys, deux images montrant un début de feuilletage, en fait de deux feuilletages sur le même tore, orthogonaux l'un à l'autre.





- Dans les feuilletages que nous avons considérés jusqu'à présent, on pourrait les appeler des *feuilletages fins*, il faut insister sur le fait que les feuilles sont toutes infiniment minces, nous sommes ici dans la fiction mathématique.

- Mais dans la réalité physique, mais aussi dans une autre réalité mathématique, les feuilles prennent de l'épaisseur, on les appellera alors des **feuilles épaissies** ou **plaques** (comme les plaques de chocolat pour rester dans la pâtisserie, on aurait pu aussi les appeler des crêpes !).

Les dessins et images précédentes donnent en fait des exemples de feuilletages plus grossiers auxquels on pourrait donner le nom de feuilletages ou de découpes en plaques.

Nous allons voir comment les fabriquer.

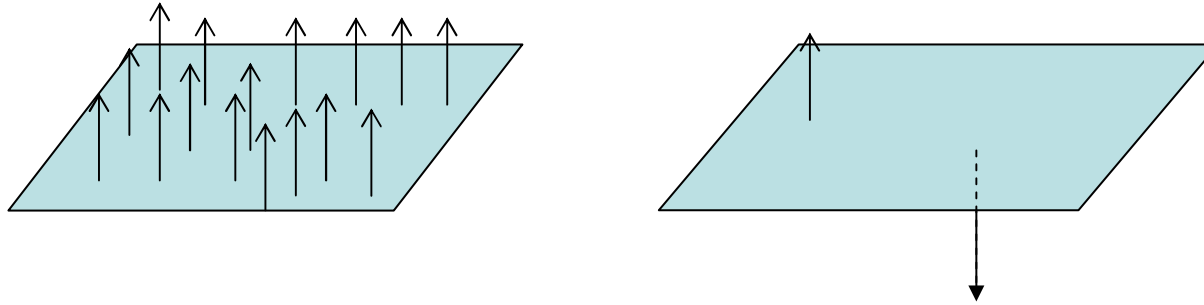
La Fabrication des Plaques

La fabrication d'une plaque par le mathématicien est très précise.

Il prend une feuille, et étire chaque point de la feuille dans une direction donnée et d'une longueur également donnée.

Il représente cette opération en un point par une flèche appelée vecteur: il donne la direction et la longueur du déplacement du point donné.

Voici des exemples de vecteurs de déplacement :





Chaque vecteur ressemble à une tige de blé. En chaque point de la feuille se trouve une telle tige, un tel vecteur : tous ces vecteurs forment un

champ de vecteurs

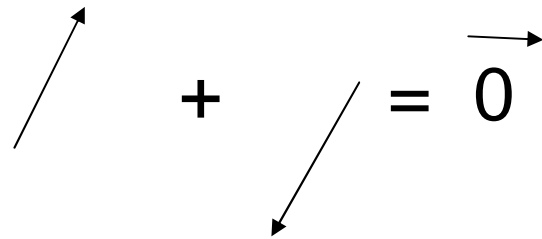
défini sur la feuille.

- Dans le monde physique local, beaucoup de manifestations sont réversibles.

Si on peut étirer la feuille dans un sens , on se place ici dans la situation très fréquente où on peut l'étirer dans le sens opposé .

La nature répète les opérations offrant des propriétés de stabilité. Par exemple, après un premier étirement, on peut en répéter un second, donnant naissance à un étirement plus important que le premier, et qu'on appellera *l'étirement résultant ou somme* des deux étirements successifs.

Avec ces deux propriétés, on peut ajouter à un étirement (vecteur de longueur donnée) un autre étirement de sens opposé. S'il a même longueur que le premier, l'étirement somme sera nul:



The diagram illustrates the addition of two opposite vectors. On the left, a vector points up and to the right. To its right is a plus sign. Further right is a vector pointing down and to the right. To the right of this second vector is an equals sign, followed by a zero vector represented by the number 0 with a horizontal arrow above it.

notant par $\vec{0}$ l'étirement nul ou encore l'absence d'étirement.

En résumé, ce groupement d'objets, ce groupe de vecteurs est caractérisé par les propriétés suivantes :

- 1- on peut ajouter deux vecteurs (d'étirement) pour en obtenir un troisième.
- 2- figure un *vecteur dit nul*, correspondant à l'absence de déplacement.
- 3- tout vecteur possède un opposé, encore appelé son *symétrique*, la somme des ces deux vecteurs étant nulle.

On peut également remarquer :

que la combinaison (l'addition) de l'étirement nul avec un étirement donné ne change rien à celui-ci, qu'il revient au même d'associer par addition un troisième vecteur à la somme de deux premiers, que d'associer par addition le premier à la somme des deux restants $[(v+v') + v'' = v + (v' + v'')]$.

- Terminologie : On dit que cet ensemble d'étirements, de déplacements, de vecteurs, structuré par les propriétés que l'on vient de reconnaître, possède la structure de groupe.

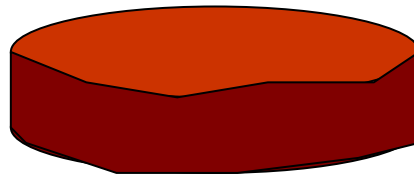
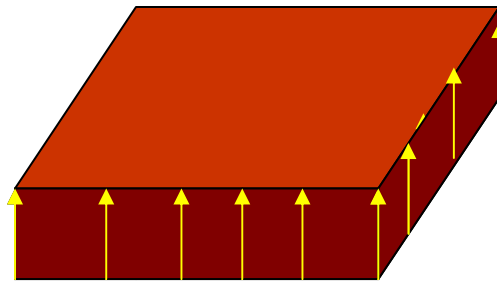
Revenons au pâtissier :

Il prépare la pâte qui se présente d'abord comme un parallélépipède. Puis il l'aplatit : il lui fait subir un étirement dans un sens que nous appellerons négatif, représenté par un vecteur v . Il peut renouveler cette opération (aplatissement nouveau v'), et obtient ainsi un aplatissement $v + v'$.



- Lorsque la pâte est devenue feuille, le pâtissier la plie et la replie, jusqu'à obtenir son millefeuille.
- Il existe une autre opération, dite transformation du boulanger, pratiquée tant par le boulanger que le mathématicien : elle consiste, après repliement, à aplatir à nouveau la pâte.
- Au bout d'un certain nombre d'opérations, le boulanger obtient une pâte dite brisée.
Au bout d'un nombre infini d'opérations, le mathématicien obtient un ensemble totalement discontinu formé de points.

- Revenons à la fabrication des plaques. Nous dirons qu'une plaque est régulière si elle est définie par l'action d'un champ de vecteurs (de déplacement) tous identiques :



Découpe et Décoration
des
Plaques & Gâteaux

Evidemment, la découpe des plaques et des gâteaux est liée à la question de leur partage entre gourmands.

Pour éviter les tensions, on aura tendance à faire en sorte que les parts soient à peu près égales. Il arrive quand même que certains veulent de grandes parts...

On distinguera deux sortes de parts :

- Celles qui ont toutes la même forme sans forcément avoir les mêmes dimensions
- Celles qui, en plus d'avoir la même forme, ont les mêmes dimensions

Vocabulaire :

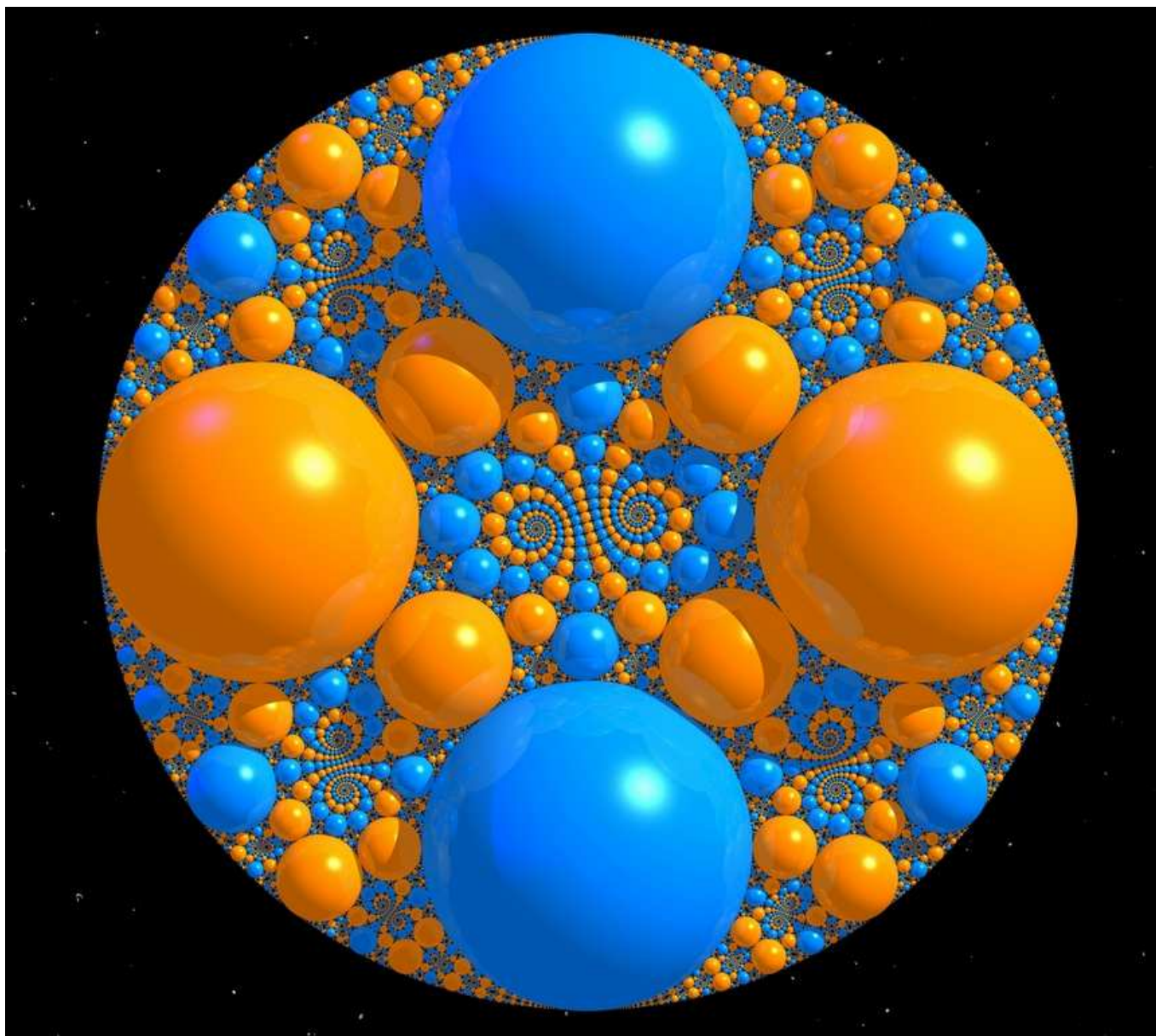
Dans tous les cas, une part sera aussi appelée un motif, ou un pavé.

Une découpe sera également appelée un pavage.

Lorsque la découpe est faite de telle manière que les parts aient même forme sans avoir obligatoirement les mêmes dimensions, on dira que la découpe ou le pavage sont topologiques.

Lorsque les parts ont même forme et mêmes dimensions, la découpe ou le pavage sont géométriques.

Quelques exemples



Le 1/15 cusp de Jos Leys, ne traduisez surtout pas cusp par coupe, à la rigueur par corne

Dans l'image de Jos, tous les motifs ont la même forme d'un disque plat. Cette image illustre la résolution récente de la question posée par le grand géomètre allemand de la fin du 19^e, Félix Klein: un tel pavage existe-t-il, le construire.

On remarquera la présence d'un motif global toujours présent mais diminuant de taille à chaque étape, et ainsi jusqu'à l'infini: on dit qu'il y a autosimilarité, un caractère du monde fractal.

Dans l'image suivante, on voit des pavages de carrés ou rectangles par des pavés de même type. Ici, la mathématique est toute présente, non évidente, dans la définition et la réalisation du motif, un travail non trivial donc de Mike Field.

