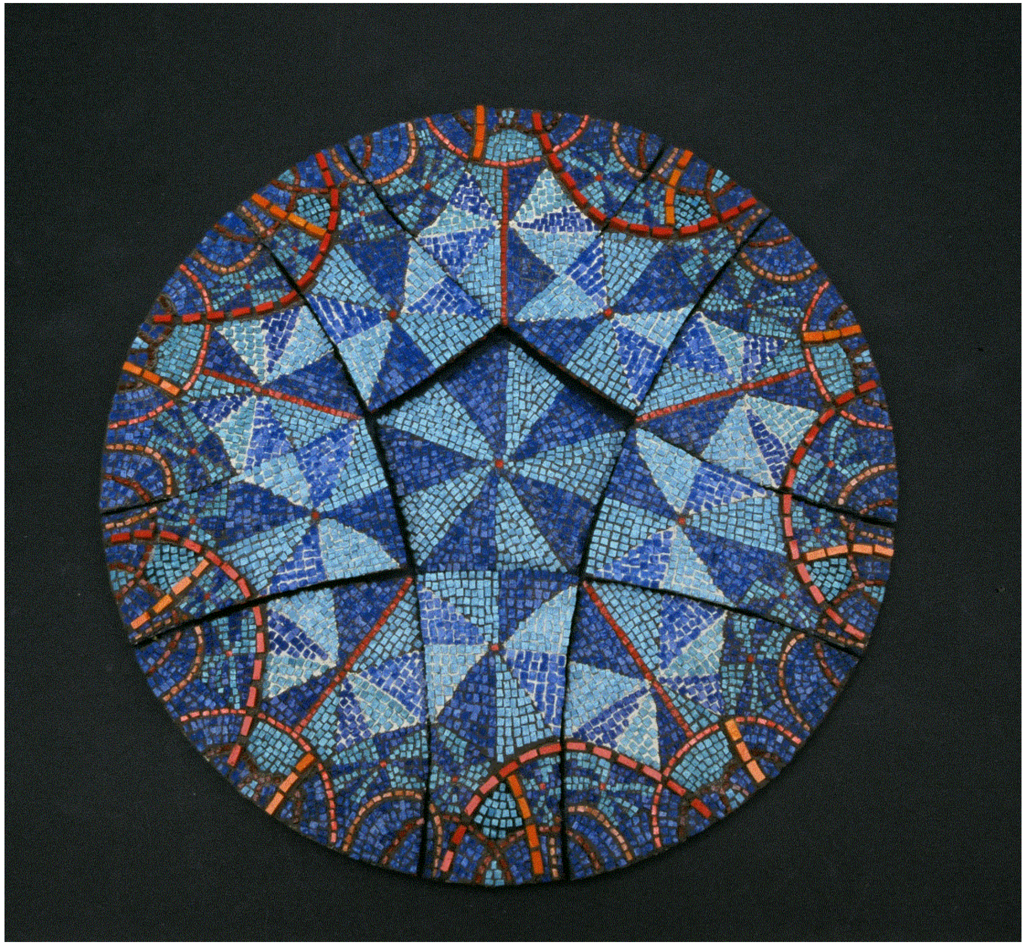
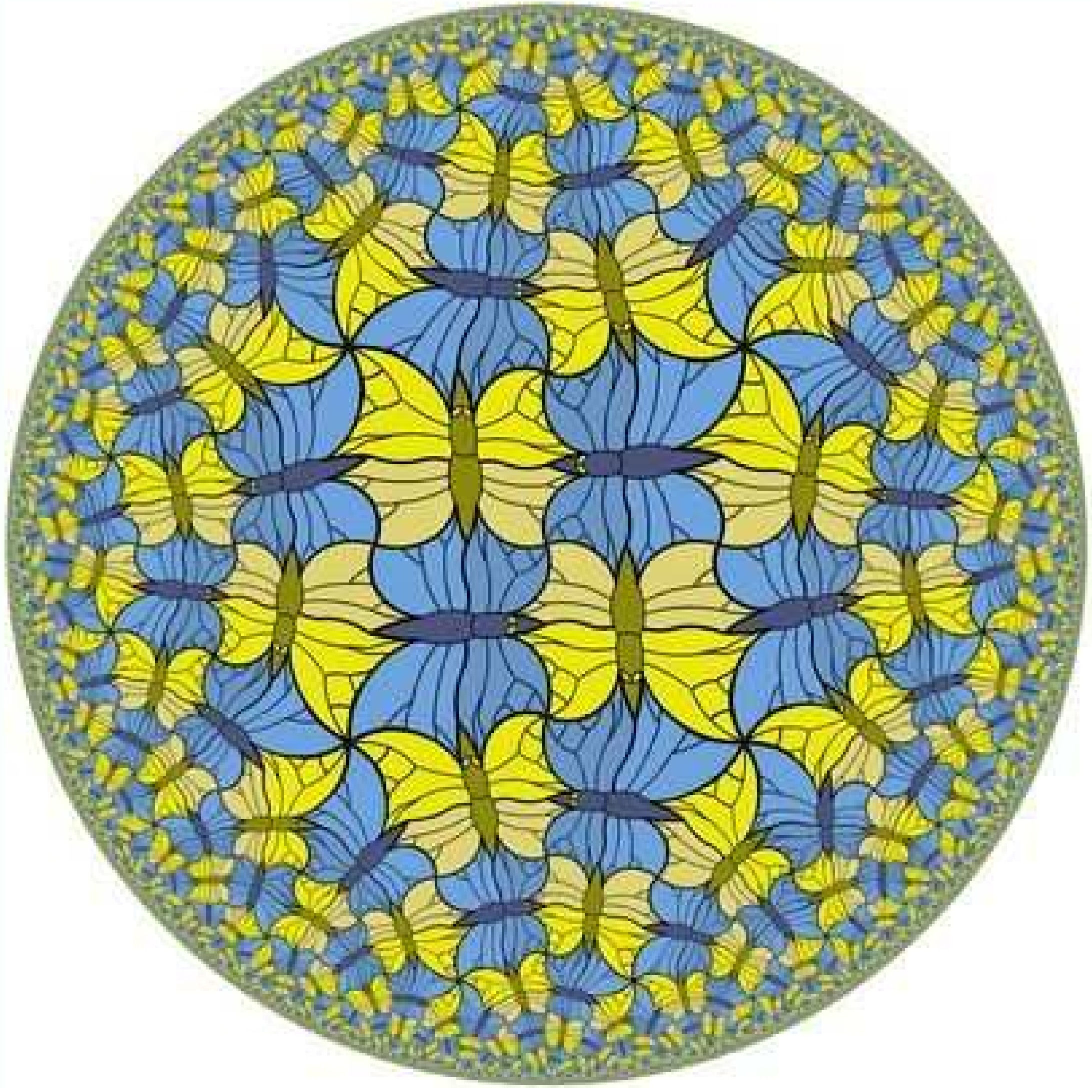
Les deux images qui suivent (Irène Rousseau, Jos Leys) nous montrent d'autres pavages à l'intérieur d'un disque.

Un pâtissier habile ne pourrait-il pas s'en inspirer ?

Mais quel travail en perspective! Etait quand même plus simple et rapide à réaliser le décor du millefeuille circulaire présenté dans la première image de ce texte.



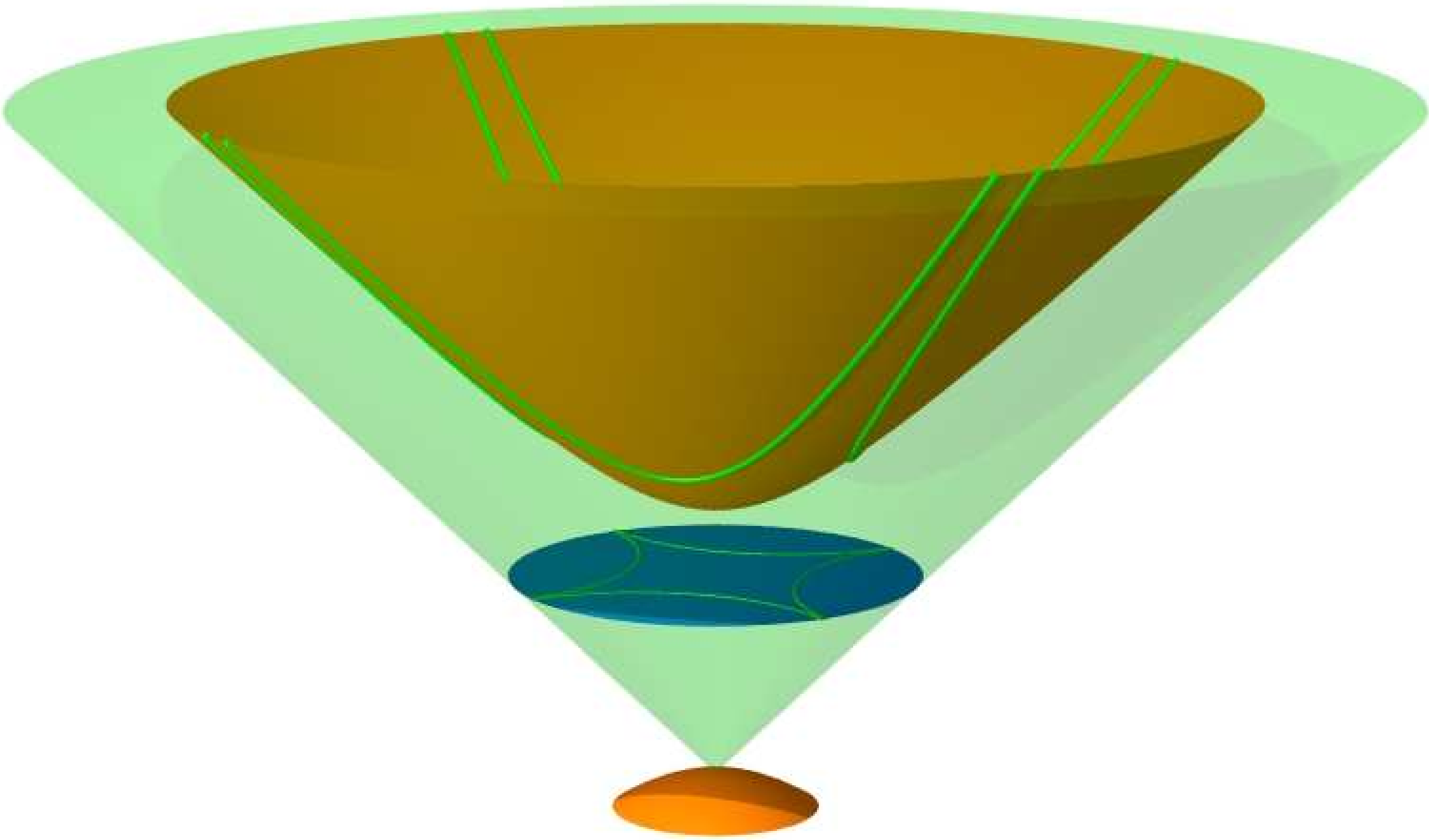


Avant d’aborder les décors simples, un mot sur ces deux pavages. Ils montrent,

sur un écran translucide,

posé sous un immense vase,

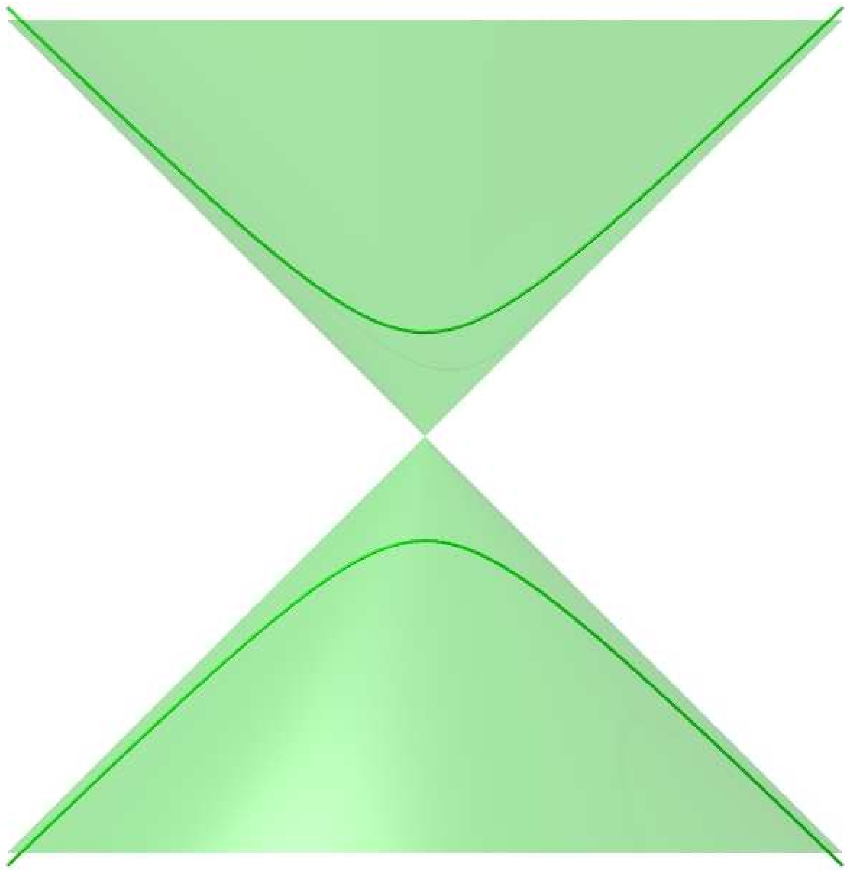
ce qu’on verrait du pavage peint sur le vase, l’observateur étant placé sous le vase.



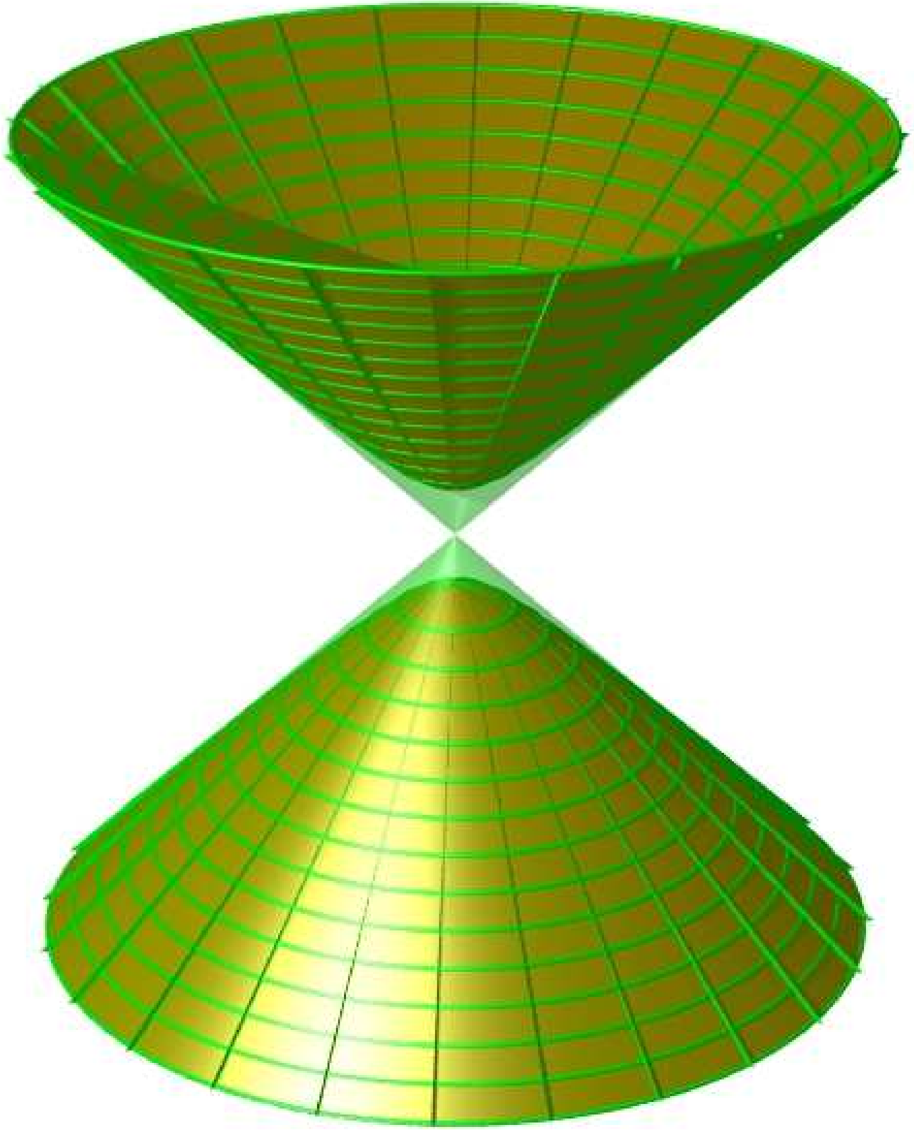
Mais comment un mathématicien va-t-il faire un vase ?

Il l’obtient en solidifiant la surface obtenue en faisant tourner au tour de son axe une hyperbole:

une courbe tracée sur cône à l’intersection du cône avec un plan parallèle à son axe.



(Dessin de Jos Leys, les suivants également)

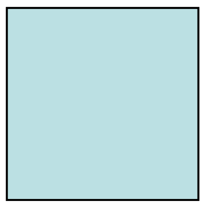
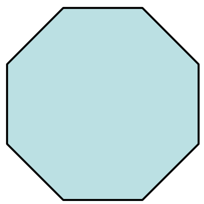
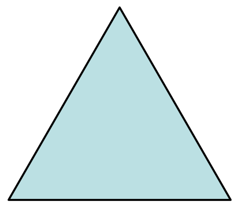


Une transformation, établie au 19e siècle par le mathématicien allemand Jacobi, permet de transformer le disque en un rectangle ou un carré, d'où ce tableau issu du précédent:

Quittons ces dessins un peu difficiles. Nous allons jeter un coup d'œil sur certains pavages sur les surfaces plus habituelles, planes: un sol, un mur, une plaque de chocolat bien sûr !

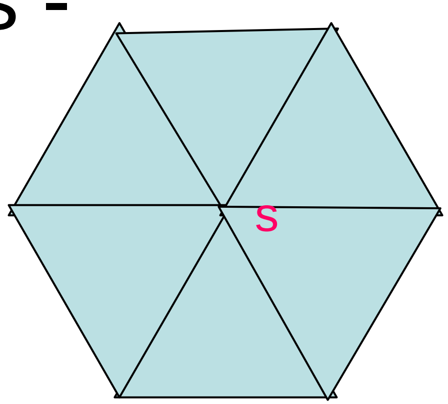
En toute chose, il faut commencer par les plus simples. Nous choisissons donc de voir s'il est possible de découper la plaque de chocolat en carrés, ou plus généralement en polygones réguliers égaux.

Ce qui caractérise entre autres un carré ou un polygone régulier est le fait que l'angle en chaque sommet du polygone a la même valeur α.

- Si en un sommet s, se rencontrent n polygones,

- on voit sur la figure 6 triangles équilatéraux se rejoindre en s -



la somme en s des angles de ces n polygones vaut 360°:

$$n\ \alpha = 360$$

de sorte que $\alpha = 360/n$

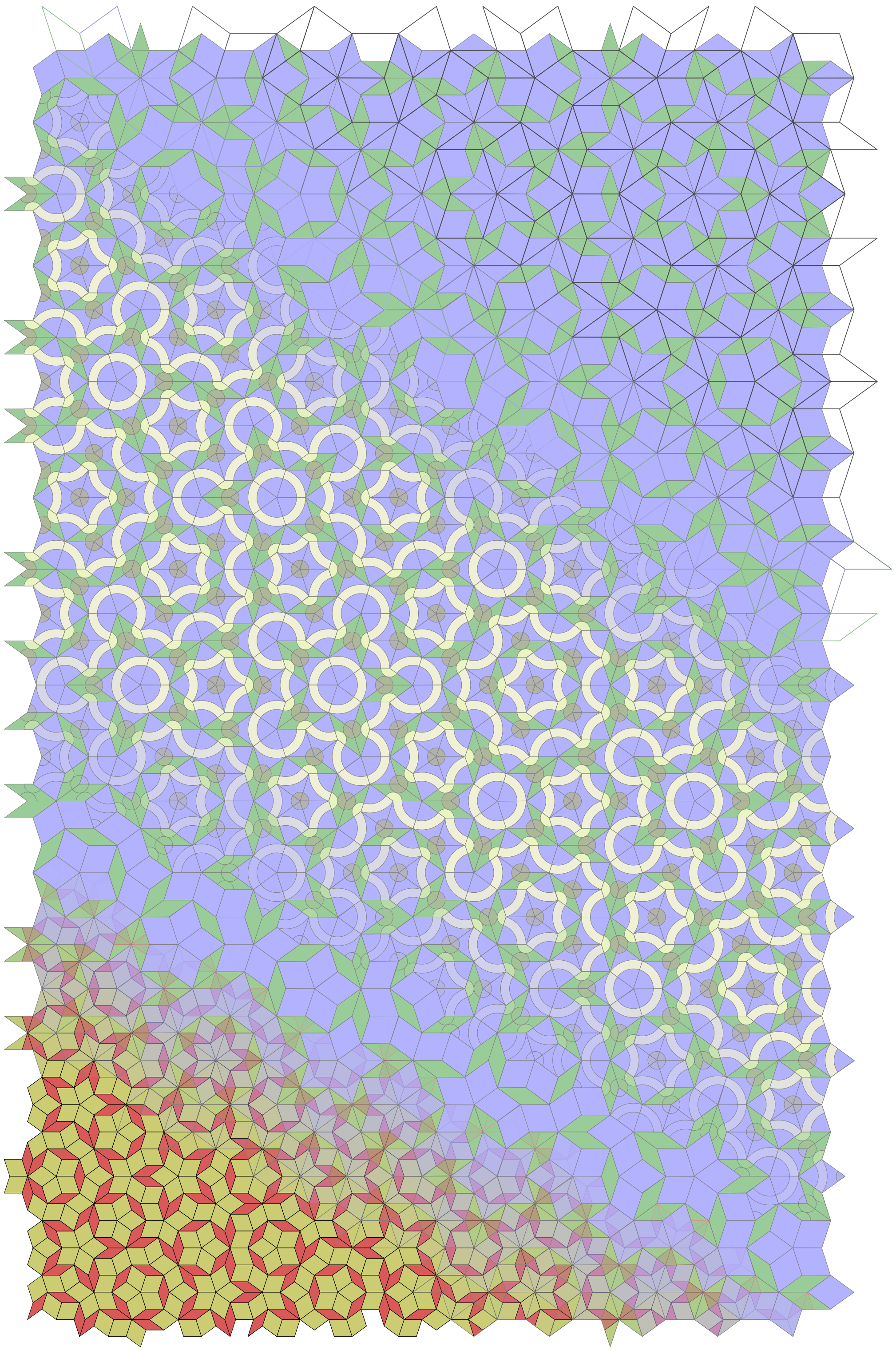
Cette relation montre qu’on peut remplir un plan avec des carrés ($\alpha = 90°$, n = 4)

des triangles équilatéraux ($\alpha = 60°$, n = 6)

des hexagones réguliers ($\alpha = 120°$, n = 3)

Mais sûrement pas avec des pentagones dont l’angle intérieur vaut 108° car 360/108 n ’est pas un entier.

Pour remplir le plan en utilisant des pentagones, il est nécessaire de faire appel aussi d’autres figures, comme le montre le tableau suivant, dû à David Austin, Bill Casselman et David Wright.



- La littérature consacrée à la théorie des pavages géométriques est très importante. On utilise beaucoup les symétries dans ces études. Et comme les ensembles de symétries ont la structure de groupe, la théorie mathématique des groupes est largement utilisée.

- On montre par exemple qu'il n'existe que 7 types de frises pouvant apparaître sur un plan, 17 types de pavages géométriques sur ce même plan, un résultat dû au mathématicien russe Fedorov en 1891.

- Allez sur google, consultez le site

  ***Les 17 types de pavage du plan* - Mathématiques magiques**

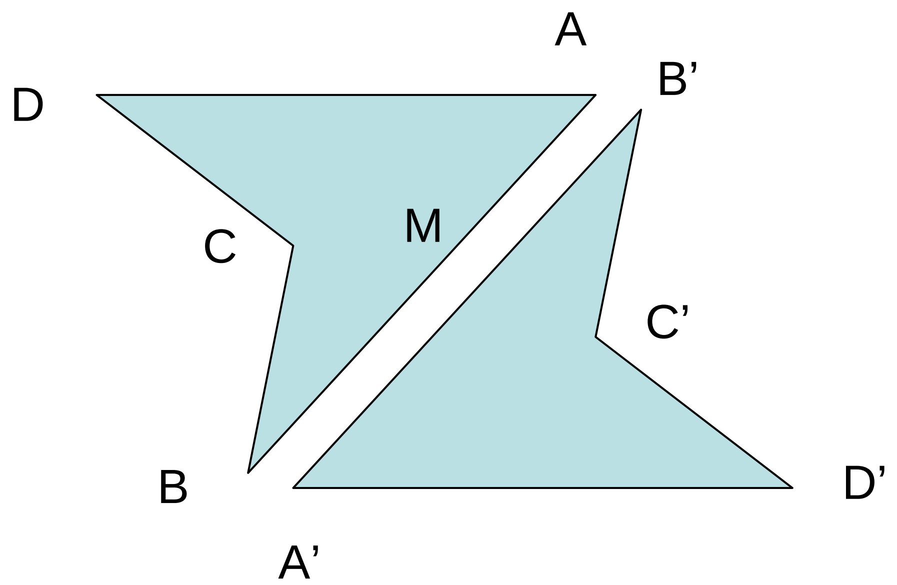
  *therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/.../**pavage_17_types**.ht...*

  admirez et amusez-vous !

Et maintenant, regardez :

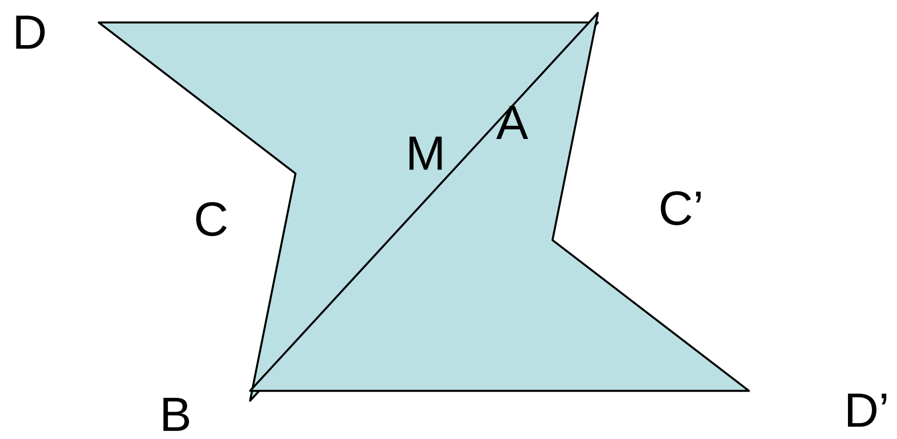
Le secret du mathématicien en Pâtisserie

On peut dessiner sur une surface plane un pavage dont le motif est un quadrilatère quelconque !

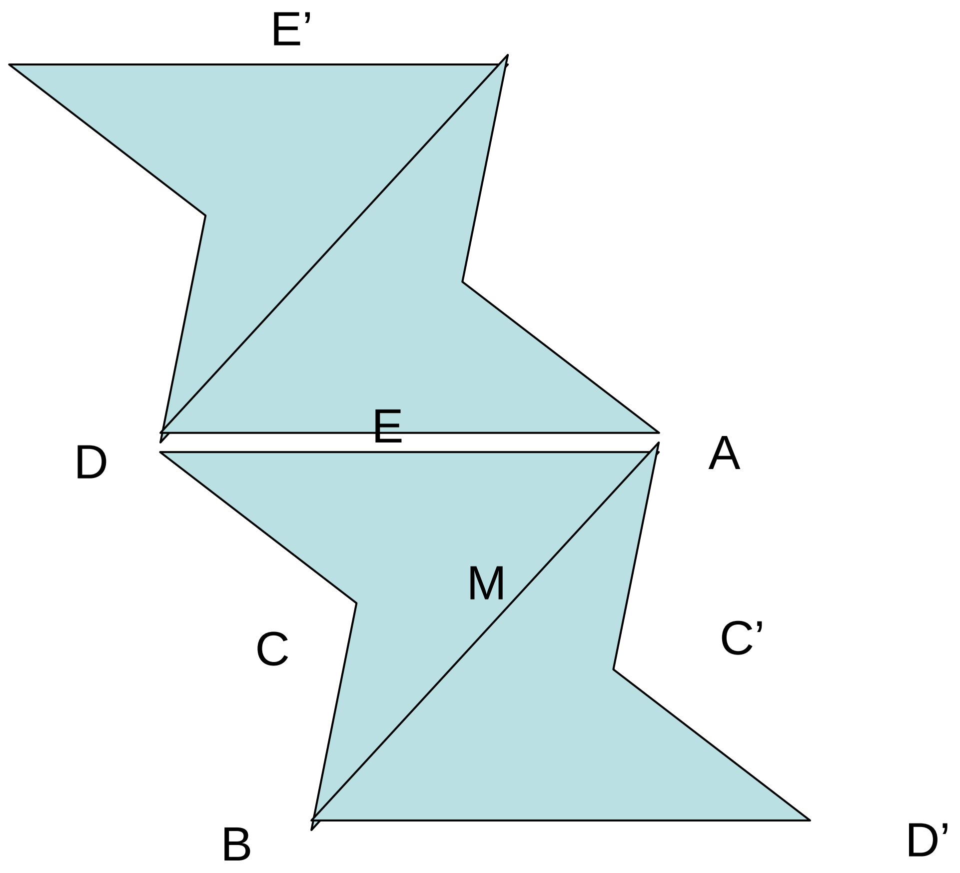


- Soit le quadrilatère ABCD. Si le plan est recouvert de tels quadrilatères, un voisin pourrait avoir un côté entièrement commun avec le quadrilatère donné.
- Accolons donc, pour voir, et par exemple, ABCD et A’B’C’D’, de manière que AB se confonde avec B’A’.
- De la sorte : ces deux côtés ont même milieu M et, puisque les angles en A et A’ sont égaux, les côtés AD et A’D’ sont parallèles.
- Il en est de même pour les deux autres couples de côtés opposés.
- On a créé un hexagone qui a donc M pour centre de symétrie.

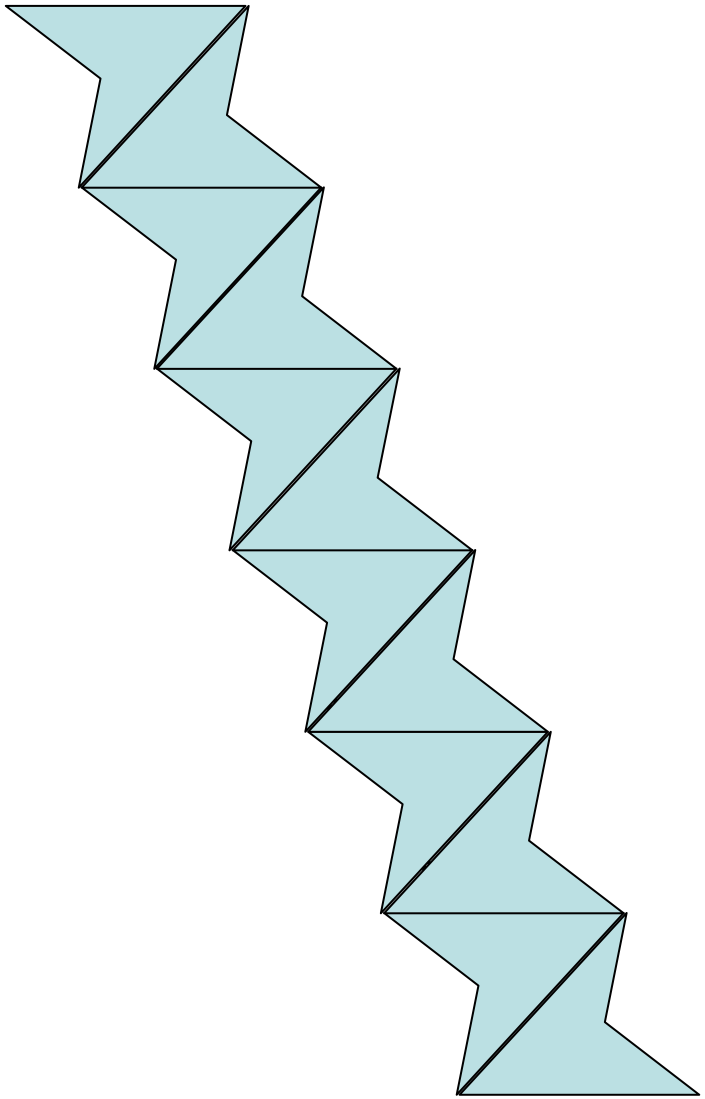
Ainsi, on a fabriqué le symétrique du quadrilatère par rapport à M, A devenant A’, B B’, M restant M. On a obtenu l’hexagone. AC’D’BCD.



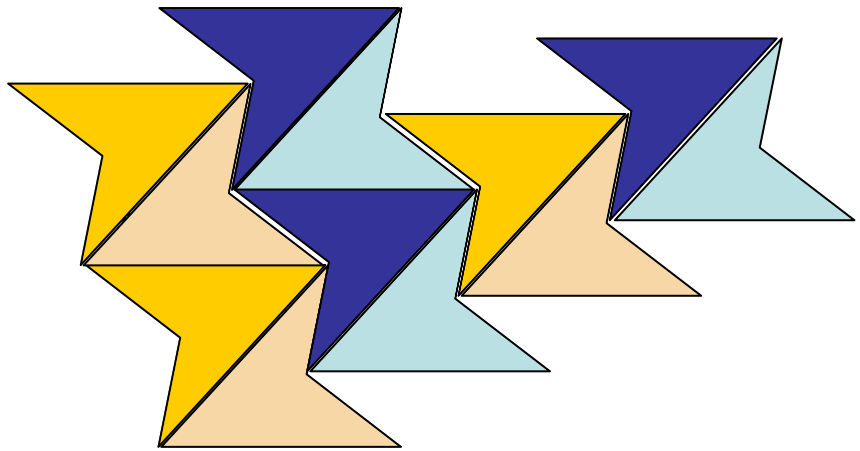
En effectuant une suite infinie de translations de l’hexagone par symétrie par rapport au milieu E de AD par exemple, et de ses translatés E’,



on construit une chaîne infinie d'hexagones dont les moitiés sont les quadrangles.



- On peut procéder de la même façon avec n’importe quel autre côté (ici le milieu de AC’) et ainsi parvenir à recouvrir le plan.



Le dessin de la diapositive 18 (respectivement 19) montre un empilement des quadrangles dans une direction que l’on pourra appeler une longueur (respectivement un largeur).

En empilant convenablement des feuilles pavées les unes sur les autres, dans le sens d’une hauteur, on fabrique une plaque qui peut être découpée en petits morceaux égaux, des petits cylindres dont la base est le quadrangle.