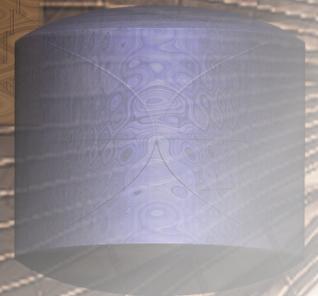


**M
A
T
H
E
M
A
T
I
Q
U
E
S
E
T
A
R
T**

**A
R
T
A
N
D
M
A
T
H
E
M
A
T
I
C
S**

**EXPOSITION IHP
7 JUIN - 25 JUILLET
2010**



**SOCIETE EUROPEENE POUR LES MATHEMATIQUES ET LES ARTS
INSTITUT HENRI POINCARÉ 11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris
www.mathart.eu**

- Avant propos par Claude Bruter

A Présentation de l'exposition

B Notes sur les participants

C Tour photographique de l'exposition

FOREWORDS

The new exhibition at the Institute Henri Poincaré manifests in some measure an exceptional character because of its presence in the celebration of two concurrent events: the Clay Mathematics Institute Millennium Prize award and the first international conference of the recently formed European Society for Mathematics and Arts (ESMA).

The Clay Mathematics Institute (CMI) awarded earlier this month the first of its seven Millennium Prize to Dr. Grigori Perelman of St. Petersburg, Russia for the resolution of the Poincaré conjecture. Dr. Perelman brought to conclusion the decisive and complex proof of the Poincaré 3-sphere conjecture. The Poincaré Institute, whose name honors the great mathematician, was a natural choice to host the award. The event paid tribute to all past and present contributors, beginning with the accomplishment of Poincaré himself.

The European Society for Mathematics and Arts is scheduled to hold its first international symposium on mathematics and art later this July. Again, the Institute has generously extended the use of its facility to the event. An exhibition of artworks by the conference's participants was a natural fit for the event.

Many undoubtedly will be surprised to discover that the most complex mathematical theories lead to the creation of works of art. Works of art, indeed, by the beauty of their lines and contours, the purity of their pictorial demonstration, their mathematical richness, the novelty, diversity and abundance of their content. The study of mathematics, by the infinite nature of the world of numbers has opened us to a universe of previously unknown remarkable and endless forms. A new generation of artists has strived to bring them to life using advanced technologies and techniques developed over the last thirty to forty years.

Readers of this catalog are privileged to be among the first to explore the works of pioneers in a distinct mode of artistic expression bound for a significant development that will make the value of these early works priceless. So much so that one can only hope it will advance the momentum toward the creation of a museum dedicated specifically to mathematical arts and mathematics, museum whose absence in today's cultural landscape continues to surprise, confound and startle.

AVANT-PROPOS

En participant à la célébration simultanée de deux événements, la remise d'un prix prestigieux d'une part, la naissance de la Société Européenne pour les Mathématiques et les Arts, l'ESMA, d'autre part, cette nouvelle exposition à l'Institut Henri Poincaré présente un caractère quelque peu exceptionnel.

Le prix de l'Institut Clay est décerné en cette année 2010 à Grigori Perelman, il vient d'apporter la preuve finale et difficile de la dernière conjecture géométrique d'Henri Poincaré. Il était naturel que l'Institut, dont le nom honore ce très grand mathématicien, soit le lieu de remise de ce prix. L'exposition entend rendre hommage à tous les acteurs présents et passés de cet événement, à commencer par Poincaré lui-même.

Quant à la Société Européenne pour les Mathématiques et les Arts, elle s'apprête à tenir dans ce même Institut, qui lui a généreusement ouvert ses portes, son tout premier Colloque. Une exposition des œuvres de ses participants va de soi.

Le public ne manquera pas de s'étonner que les mathématiques les plus savantes conduisent à la création d'œuvres d'art. Œuvres d'art en effet par la beauté des contours et des lignes, leur pureté, leur richesse picturale et parfois mathématique, la nouveauté, la diversité et l'abondance de leur contenus. Par la nature même du nombre, les mathématiques nous font entrer dans un monde fabuleux et infini de formes jusqu'alors inconnues, que des artistes d'avant-garde s'emploient à incarner dans la matière, faisant appel à toutes les nouvelles technologies et techniques créées au cours de ces trente à quarante dernières années.

Les lecteurs de ce catalogue sont évidemment privilégiés, pour être parmi les premiers à découvrir des œuvres de pionniers dans un mode nouveau d'expression artistique, appelé à des développements considérables, qui rendront inestimables la valeur de ces premières œuvres. Tant et si bien qu'on finira par construire un musée spécifique dédié aux arts mathématiques et aux mathématiques, musée dont l'absence aujourd'hui étonne, surprend, laisse pantois.

The work of some thirty-five American and European artists is represented in this exhibition. The unique setting enables them to be shown in their best light. The pieces have been selected from the Society's larger art register. They are displayed not by author, but according to their mathematical content.

The graphics most closely associated to some of Poincaré's mathematical achievements are exhibited on the ground floor. They relate, among others, to studies of the movement and the geometric properties of certain surfaces, as for instance the one of the saddle on a horse, which is named hyperbolic, or the understanding of objects such as the sphere immersion in the 4-dimensional space. The famous conjecture, now known as a theorem, states a simple condition implying that any 3-dimensional compact-domain (manifold) can be continuously deformed up to the 3-sphere: any path on the domain that starting from a point and coming back to that point without leaving the domain can be continuously retracted into a point.

It is quite possible at that stage that reading those few lines may have discouraged a few or hardly inspired other whose dealings with mathematics might be far remote, if indeed, it ever happened.

Yet those words are opening a short digression from the main purpose of this catalog that undoubtedly brings to light other elements in this narrative and deserve additional privileged attention. The works featured in this catalogue may call for further questioning such as - what kind of support is used in each individual composition, what physical properties determine the choices; what are the steps of development, execution of each concept; how the works are technically completed within each selected medium; when color is used, what determine the color scheme of each element, what tools are being adopted for the sketching of the forms, what are the particular properties of each tool, their advantages and shortcomings; how long does it take to produce such a work; how is the printing done, by what process; what is the life expectancy of the final product; how much is borrowed and how much is original in each work; what conceptual and technical element determines its design, its content, its play of light and dark, etc. ...

Alors les œuvres des quelques 35 artistes américains et européens représentés dans cette exposition trouveront le cadre qui permettra de les mettre pleinement en valeur. Ces œuvres ne sont ici que quelques-unes, puisées dans le fonds dont nous disposons, présentées non pas par auteur, mais selon leur contenu mathématique.

Au rez-de-chaussée sont les œuvres les plus directement en rapport avec quelques-uns des travaux de Poincaré. Ils se rapportent entre autres à l'étude des mouvements, des propriétés géométriques de certaines surfaces, comme par exemple celle d'une selle de cheval et qu'on nomme hyperbolique, à la compréhension de certains objets plongés dans l'espace à 4 dimensions, comme par exemple la sphère dans cet espace. La fameuse conjecture, devenue aujourd'hui théorème, énonce une condition simple qui assure aux domaines de l'espace à quatre dimensions de pouvoir être continûment déformés en cette sphère : sur ces "domaines bornés, tout chemin qui revient sur lui-même peut être également continûment déformé en un point, sans bien sûr quitter le domaine.

Il est bien possible que la lecture de ces dernières lignes, sans toutefois déjà les rebuter, n'inspirent guère un grand nombre de lecteurs, dont le commerce avec les mathématiques pourrait être fort lointain, si toutefois il fut jamais établi.

Par ces quelques mots, une parenthèse sur le contenu de ce catalogue vient d'être ouverte, lequel contenu mérite certes débat. Le catalogue présente des œuvres qui, chacune d'elles, peut faire l'objet d'interrogations. En voici quelques-unes : quel est le support matériel de l'œuvre, quelles en sont les propriétés, comment, pour ce support particulier, l'œuvre a-t-elle été réalisée techniquement ; s'il y a couleur, comment se fait l'impression, par quel procédé, comment est établi en chaque élément le choix de la couleur ; avec quels outils se fait le dessin, quelles en sont les propriétés, les avantages, les défauts ; quelle durée faut-il pour réaliser une telle œuvre, durée de fabrication matérielle, de mise au point, de fabrication conceptuelle ; quelle sont les parts d'emprunt et d'originalité dans cette œuvre, du point de vue des éléments conceptuels et techniques qui vont déterminer son dessin, son contenu, ses jeux de lumière, etc....

You see, dear reader, answering to each singular topic would require an exhaustive study, very likely intended for professionals, and compiled from the author's deep knowledge of the history and evolution of this particular field, both from the computer and the mathematical perspective.

The background of the art contained in this catalog emphasizes for most, a huge body of work spread over time in the field of mathematics and visualization. Learning experience, intense study, reflection and exploration, along with the pure power of invention and esthetic assertion frame the unique and exceptional value of each distinct statement.

This exhibition is for the viewer, a lesson in humility. It is undoubtedly the immediate observation that affects us all. One needs not to be a mathematician to recognize it.

Clearly, a pedagogic discourse could emerge from any of these works, even from the seemingly simplest demonstration whose description could make a thread leading the viewer toward fundamental principles of mathematics discovered step by step to this day. A man's life would no longer suffice.

In the larger context of an educational purpose, such a task for could be more or less elaborate depending on the audience. This form of expression offers the opportunity to accommodate various constituencies in infinite ways so that neither the expert finds it naive, elementary or trivial nor the layperson condemns it as silly, boring, or incomprehensible.

Lacking the financial support to allow the making of a more substantial report and also taken by the time, I've not been able to sprinkle in this catalog the few pinches of sugar, salt and spice that might have added to it its full educational flavor.

However, artistic compositions as such these are by no means educational tools. Their function is foremost psychological and cultural. Beautiful works prompts admiration, possibly as a way to compensate or forget one's personal hardship. They fascinate and often carry some form of charismatic, enchanting power.

Vois-tu, lecteur, la réponse pour chaque œuvre à ces questions tiendrait parfois dans un ouvrage complet, réservé de surcroît bien souvent au spécialiste, lorsque apparaîtraient tout le savoir et toute l'expérience de l'auteur, tant sur le plan informatique que sur le plan mathématique.

En arrière-plan de la plupart des œuvres figurant dans ce catalogue, se trouve, pour chacune, un énorme travail, étalé sur tout le passé de son auteur, tant dans le domaine de l'informatique souvent, que de la mathématique toujours, d'apprentissage, d'étude, de réflexion, de découverte parfois, qui font, avec la faculté d'invention pure et l'expression du goût, la valeur unique et impayable de l'œuvre.

Chacune est, pour celui qui la regarde, une leçon d'humilité. C'est assurément là un premier enseignement qui nous atteint tous. Point n'est besoin d'être mathématicien pour en être pénétré.

Il est d'évidence qu'un discours pédagogique peut émerger de n'importe quelle de ces œuvres, depuis la plus simple apparemment d'entre elles, discours dont on pourrait tirer un fil conducteur nous menant en principe à parcourir de pas en pas la totalité du monde mathématique jusqu'ici découvert. Une vie d'homme aujourd'hui n'y suffirait plus.

Selon le public d'auditeurs, un tel commentaire à des fins pédagogiques peut être plus ou moins approfondi. Il en est d'infinies sortes, que le spécialiste peut juger naïve, trop élémentaires voire triviales, mais que l'auditeur de la même présentation trouvera saugrenue, barbante, voire incompréhensible.

Aussi, peu encouragé par ailleurs par l'absence totale des finances nécessaires à la publication d'un volume trop important, pris également par le temps, n'ai-je pu déposer dans ce catalogue les pincées de sucre, de sel et d'épices qui lui auraient peut-être apporté toute la saveur pédagogique escomptée.

D'ailleurs, une œuvre artistique et qui se veut telle n'a nullement une fonction scolaire. Sa fonction est psychologique et culturelle. Une belle œuvre suscite l'admiration, une forme de dépassement, l'oubli de sa personne et de ses misères. Elle fascine, possède une sorte de pouvoir charismatique, enchanteur.

Behind each work is a person who designed and implemented it. When the artist used mathematics, its presence is felt in each work. It participates in its breath, its property, it radiates in the atmosphere it creates around it. The compositions put the viewer in a state of enthusiasm and excitement, which enables him to pleasantly assimilate the unrecorded and subconscious message that subtly journey into the realm of thought, mitigates and perhaps removes rejections and misgivings. Often a single word from a title card, a brief comment becomes the awakening threshold and serves as a primer for a deeper understanding of the work.

The artistic narrative has reached its goal.

I beg the reader to forgive this long digression. Let us return to the exhibition and go to the second floor, where the Library hosts additional works.

Three main themes are developed in this larger presentation:

- Tessellation (entrance and the back of the library)
- Minimal surfaces (brighter corridor's wall abutting the exterior of the building)
- Algebraic geometry surfaces and visual investigations of the solution to various partial differential equations (Main library floor).

These themes are illustrated jointly on the wall images and the small sculptures presented in the display cases.

No artist name has been mentioned. One only needs to remember that these artists are part of an ancient tradition that links art to mathematics. A tradition that has among its most illustrious members the painter Agatharque who designed the sets of Aeschylus' theater, Dürer and Vinci during the Renaissance, or even Dali this last century. No doubt more than one of the many you will discover here will leave his name in the history of this remarkable tradition.

C. P. BRUTER

Mais derrière chaque œuvre est présent celui qui l'a conçue, réalisée. S'il a fait appel aux mathématiques, celles-ci sont présentes dans l'œuvre, elles participent à sa respiration, à ses propriétés, à l'atmosphère qu'elle crée autour d'elle, à son rayonnement. L'œuvre met ainsi le spectateur dans des conditions d'éveil et d'attention qui lui permettent d'assimiler avec douceur une forme de message informulé et inconscient, qui, cheminant subtilement dans les arcanes de la pensée, atténuera jusqu'à peut-être les supprimer rejets et appréhensions. Et souvent un simple mot sur une légende, une parole, éveilleront le seuil de curiosité, serviront d'amorce à la recherche d'une compréhension première du contenu de l'œuvre.

L'œuvre artistique aura atteint son but.

Puisse le lecteur pardonner cette longue digression. Revenons à l'exposition, et montons à l'étage, où se trouve la bibliothèque.

Trois thématiques principales y sont présentes :

- Remplissage d'un domaine par des motifs identiques dans l'entrée et le fond de la bibliothèque
- Formes minimales que développe le monde physique, le long du couloir le plus éclairé donnant sur l'extérieur du bâtiment
- Surfaces issues de la géométrie algébrique et de la résolution de certaines équations aux dérivées partielles dans le reste de la bibliothèque.

Ces thèmes sont illustrés tant par les tableaux que par les petites sculptures dans les vitrines.

Aucun nom des artistes présents n'a été cité. Rappelons simplement que ces artisans s'inscrivent dans une tradition immémoriale qui lie les arts aux mathématiques, et qui compte, par exemple, parmi ses plus illustres représentants, le peintre Agatharque qui fit les décors du théâtre d'Eschyle, Dürer et Vinci à la Renaissance, ou Salvador Dali au siècle dernier. Nul doute que plus d'un de ceux que vous allez découvrir laissera son nom dans l'histoire de cette tradition.

C.P. BRUTER

EXPOSANTS

François APÉRY
Benno ARTMANN
Boris ASSANCHEYEV
David AUSTIN, William CASSELMAN, David WRIGHT
Tom BANCHOFF
Luc BÉNARD & Richard PALAIS
Anders BJÖRNER & Frank LUTZ
Philippe CHARBONNEAU
Jean-François COLONNA
Jean CONSTANT
Richard DENNER
Tamás FARKAS
Mikael FIELD
Charles GUNN
George HART
Herwig HAUSER
Slavik JABLAN
Patrice JEENER
Dmitri KOZLOV
Oliver LABS
Hervé LEHNING
Jos LEYS
Sylvie PIC
Ulrich PINKALL
Philippe RIPS
Irène ROUSSEAU
Radmilla SAZDANOVIC
John SULLIVAN
François TARD
Dick TERMES
Miroslav ZEC



PLAN & DESCRIPTION SUCCINTE DE L'EXPOSITION

Par Claude Bruter



Caveat: Comme dans toute cette exposition, la disposition des œuvres tient compte non seulement de leur contenu mathématique, mais aussi des possibilités locales et physiques d'accrochage qui mettent parfois en défaut les appariements souhaités. Pour des raisons de sobriété, la présentation des œuvres situées dans la bibliothèque proprement dite sera succincte. Seules les œuvres présentées au rez-de-chaussée feront l'objet d'une présentation un peu plus détaillée, et que voici.

En entrant dans le bâtiment de l'Institut, le visiteur fait face au couloir où sont exposées les œuvres les plus directement en rapport avec quelques-uns des travaux d'Henri Poincaré, concernant le mouvement et les espaces au sein desquels ils sont accomplis.



IHP, couloir d'entrée

Poincaré s'est intéressé à certains de ces domaines, *terrae incongnatae* à son époque, comme les surfaces, objets de la dimension 2, dont la géométrie est hyperbolique, comme l'espace euclidien de dimension 4, et en particulier dans cet espace, la sphère. Ce sont ces domaines qui ont fait l'objet de représentations aux qualités esthétiques et que nous allons explorer.

1. La sphère de dimension 3 à travers les œuvres de Artmann, Banchoff, Leys

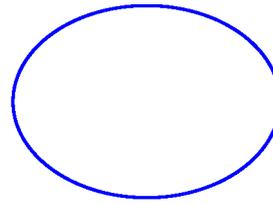
Caveat: forme (topologie) + mesure Ré (métrique) = géométrie. On se placera ici essentiellement du point de vue de la forme (au sens mathématique): de ce point de vue, l'ellipse et le cercle représentent le même objet intrinsèque.

C'est avec le compas qu'on trace dans le plan un beau cercle, cette forme géométrique parfaite aux yeux de Platon et sans doute des Pythagoriciens. La pointe marquante suit le dessin d'une courbe qui revient sur elle-même. Une courbe, comme une ligne, est un objet de dimension 1. Comme le cercle, la sphère de dimension 1 peut être représentée par une ligne courbe: on la note par conséquent S_1 .

On peut la décrire par ce mouvement platonicien parfait d'une rotation uniforme de 360° d'un point autour d'un point fixe. Ou encore par une rotation de 180° d'un couple de points (formant la sphère S_1 , 0 car la dimension d'un point est nulle) autour de leur « milieu » (le « centre » de S_1 noté D_1).

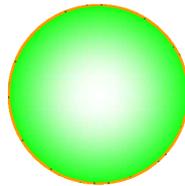


En rouge, un exemple de représentation de la sphère S^0 composée de deux points. En noir, une représentation de de son « centre », \mathbf{D}_0 .



En bleu, un exemple de représentation de la sphère S^1

Dans notre espace usuel, dont la dimension est 3, la sphère est comme la peau d'un orange infinie fine, c'est une surface, un objet de dimension 2, notée par conséquent S^2 . On peut naturellement la construire, comme toute sphère de dimension quelconque, par rotation d'une sphère de dimension moindre – j'ai donné cette construction en 1974.



Remplie de métal, la 2-sphère change de statut, devenant le bord de \mathbf{D}^3 , la boule étincelante au soleil et pesante du joueur à la pétanque:



c'est là un domaine de notre espace usuel, lequel avons-nous dit est de dimension 3.

La sphère de dimension 3, la 3-sphère S^3 , située, elle, dans l'espace à 4 dimensions, a la consistance de cette boule du pétanqueur.

C'est à son propos que Poincaré a émis sa fameuse conjecture, démontrée in fine par Grigori Perelman. Comme sur la sphère usuelle de dimension 2, on peut s'y promener en suivant des chemins qui reviennent à leur point de départ, et qui ont peu ou prou la forme d'un cercle, en d'autres termes celle d'une sphère S^1 :



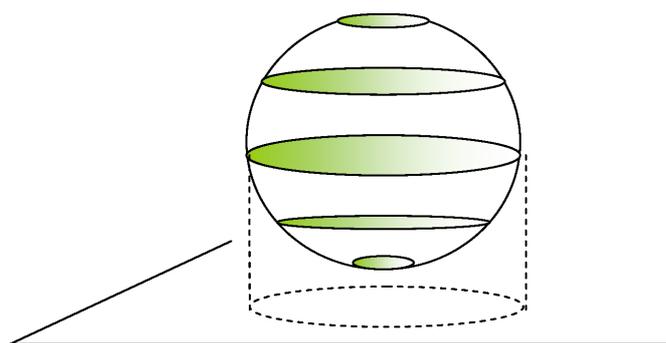
On peut bien sûr déformer un tel chemin fermé sur lui-même, encore appelé un lacet, en un autre de longueur plus petite, jusqu'à éventuellement n'obtenir qu'un point.

Supposons qu'on ait en main un autre domaine de cet espace à quatre dimensions, aussi compact que la sphère, et qui bénéficie de cette même propriété qu'on vient de reconnaître pour la sphère : tout lacet tracé sur le domaine peut être continûment déformé en un point. Alors, selon Poincaré, ce domaine, supposé malléable, peut être continûment déformé en la sphère S^3 .

Nous n'avons pas de vision directe de cette dernière sphère, et on a essayé de s'en faire une idée par l'intermédiaire de modes possibles de construction.

Les premières œuvres que l'on voit en entrant, celles de Tom Banchoff, la première de Jos Leys, celle de Benno Artmann, correspondent à une description dont l'initiateur a été le mathématicien allemand H. Hopf en 1931. Partant de son équation, il montre qu'on peut construire la 3-sphère en associant à chaque point d'une sphère ordinaire S^2 un cercle ordinaire S^1 , maintenant appelé cercle de Hopf.

Comme on peut imaginer la sphère ordinaire, bien découpée par des plans parallèles, comme une sorte de millefeuille (Figure 1) dont chaque feuille serait un cercle de taille bien sûr nulle en chacun des pôles nord, PN, et sud, PS, de la sphère, ces cercles sont dits alors singuliers.



La sphère en tant que millefeuille

Figure 1

On conçoit alors que notre sphère S^3 dans l'espace à quatre dimensions puisse être également simplement construite avec seulement des cercles S^1 . Peut-on concrétiser quelque peu cette conception ?

Prenons un des cercles de rayon non nul du millefeuille : en chacun de ses points, avons-nous dit, lui est associé un cercle ordinaire. Cette configuration peut rappeler à certains des souvenirs : les joailliers d'autrefois disposaient d'un anneau métallique en divers points duquel étaient accrochés d'autres anneaux de taille plus diverse servant à déterminer le diamètre du bijou à créer. Ces baguiers constituaient ainsi une approximation des représentations physiques possibles de la configuration évoquée. La forme d'un tore creux, d'une bouée, en donne une représentation plus complète.

Ce tore creux est noté T^2 ou $S^1 \times S^1$, notation qui signifie qu'à tout point s d'un premier cercle, celui de taille non nulle extrait du millefeuille, appelé l'âme du tore, est associée une autre courbe analogue à un cercle, représentée par le second S^1 : pour souligner que celui-ci est attaché à chaque point s du premier, il sera noté $S^1(s)$.

Physiquement, $S^1(s)$ peut être représenté sur les deux dessins ci-dessous par un cercle disposé verticalement : mais on peut le pencher et en modifier la forme à souhait, pourvu que cette forme conserve les propriétés topologiques du cercle type fondateur.

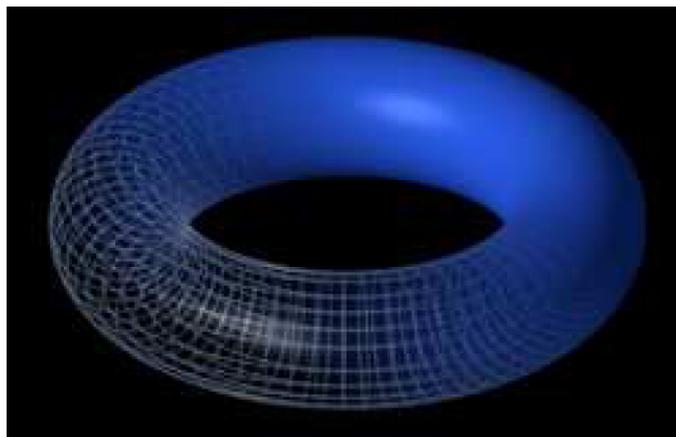


Figure extraite de Wikipédia

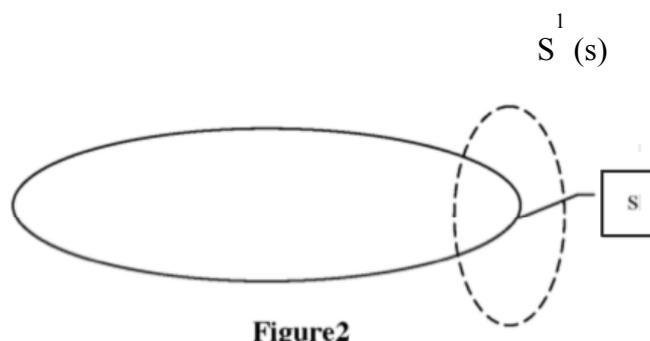


Figure2

Pour obtenir la 3-sphère, il faut envisager et assembler tous les tores que l'on peut ainsi construire. Il en est autant que de cercles sur le millefeuille, et donc autant de points qui les représente, qu'en contient le diamètre du millefeuille dirigé selon son axe nord-sud.

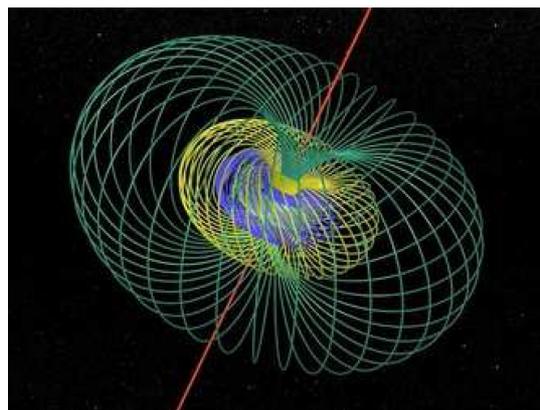
Les œuvres de Banchoff et de Leys montrent des représentations locales et partielles d'assemblages de ce genre. Voyons comment ils sont conduites.

Regardons d'abord notre 2-sphère habituelle supposée éclairée de dessus par un faisceau de rayons verticaux, issus d'une source située dans la direction nord-sud, mais bien loin au delà du pôle nord, à l'infini.

Nous voyons sur la première figure qu'un cercle quelconque du millefeuille a pour ombre, pour image, un cercle égal dans le plan passant par le pôle sud et perpendiculaire à l'axe sud-nord.

C'est un phénomène tout à fait analogue qui se produit lorsqu'on éclaire dans l'espace à 4 dimensions la 3-sphère par un faisceau de rayons lumineux tous perpendiculaires à l'espace tangent à cette sphère en son pôle sud, espace tangent qui maintenant a la dimension 3, alors que dans le cas précédent il avait la dimension 2.

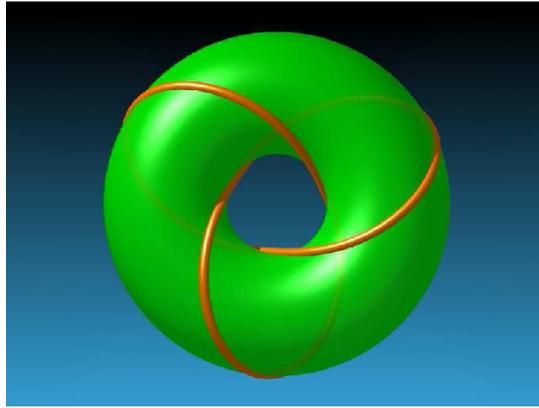
Les tores précédents, analogues à nos cercles sur la 2-sphère usuelle, ont pour ombre, pour image, pour projection dans l'espace tangent au pôle sud à la 3-sphère des tores équivalents. L'image suivante en montre quelques-uns.



Jos Leys

http://www.dimensions-math.org/Dim_CH7.htm

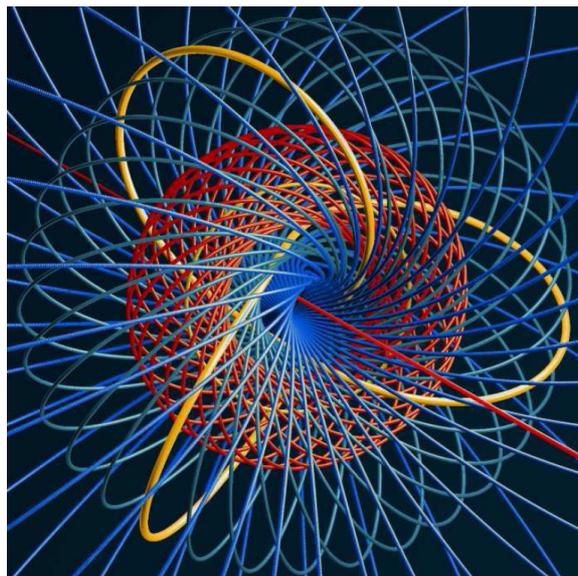
Il y a bien des façons de concevoir, avons-nous laissé entendre, la représentation physique du tore $\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$, par exemple selon la forme que l'on donne au second des \mathbf{S}_1 : ce peut être un vrai cercle, appelé ici un nœud régulier trivial, comme dans l'image que donne Wikipédia ; mais ce peut être aussi un nœud à trois lobes ou feuilles, dit nœud de trèfle, qui s'enroule sur le tore (on voit à l'étage, dans une vitrine, un tel nœud bien régulier réalisé par Philippe Rips),



Jos Leys

plus généralement un nœud ayant un nombre impair de feuilles. Le tore peut ainsi être entièrement recouvert par un nombre fini de tels nœuds.

Ce sont de tels tores feuilletés par des nœuds que l'on voit dans le tableau de Jos Leys:



Jos Leys

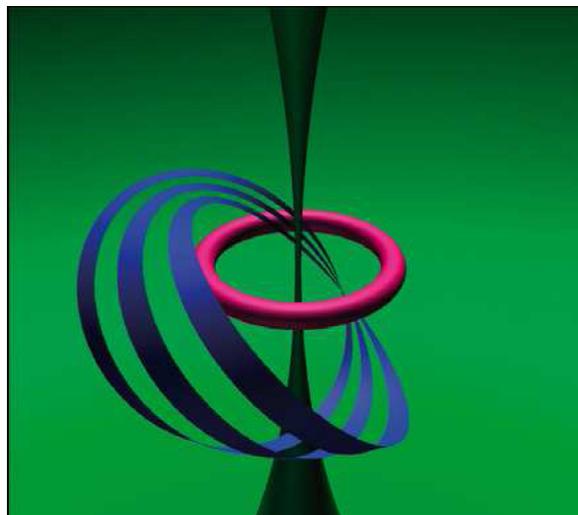
Le pôle sud PS_1 étant un cercle du millefeuille réduit à un point, le tore correspondant se limite à ce seul S_1^1 (PS_1) passant par le point PS_1 : il est représenté sur le tableau par le nœud de trèfle couleur or. Il n'y a, de la même façon, qu'un seul S_1^1 au pôle nord. En gonflant la sphère à tel point que ce pôle nord se trouve à l'infini, la trace de la projection du S_1^1 qu'il porte est maintenant une droite, en rouge sur l'image.

Tous ces faits ayant pu être obtenus par le calcul, leur programmation conduit à la réalisation d'images aux lignes parfaites, respectant au mieux les symétries. L'emploi expert d'un

logiciel pictural permet à l'homme de l'art de créer cette image qui, définitivement, saisit le regard.

Les travaux pionniers du mathématicien américain Tom Banchoff, et qui ont conduit à la création des tableaux que nous voyons, remontent à 1978. Ceux-ci ont été réalisés au début des années 80 avec une petite équipe constituée de Huseyin Kocak, Fred Bishopp, David Laidlaw, et David Margolis, animée par David Cervone.

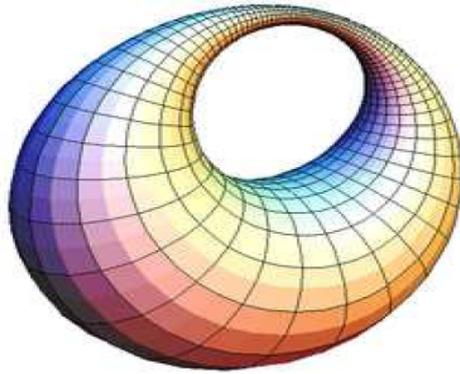
Hopf Links ci-dessous, une œuvre très élégante, montre trois des tores précédents, présentés différemment. L'un est grand par rapport aux deux autres, on n'en voit que la surface lisse de couleur verte, elle constitue le fond du tableau. Le second tore, également lisse, le plus petit, est rose, alors que le troisième tore, intermédiaire, est bleu: il n'est pas représenté entièrement, seulement par quelques cercles élargis en bandes qui s'enroulent autour du tore.



Tom Banchoff

On remarquera ici que les tores rose et bleu sont enlacés: l'étude des S^1 associés à deux points s et s' , situés chacun sur l'un de deux cercles voisins du millefeuille, montre cet enlacement. Sont également enlacés deux S^1 associés à deux points voisins situés sur l'un quelconque de ces cercles. Ce phénomène est rendu ici plus visible que sur l'image faite par Jos Leys. Le tore bleu de Banchoff révèle d'ailleurs un autre mode de remplissage, on dit feuilletage, de la surface du tore T^2 .

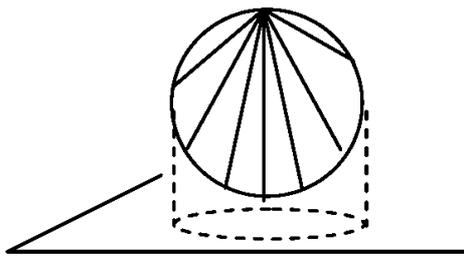
Prenons le tore bleu de Wikipédia, et sur ce tore, choisissons un cercle cobaye $S^1(s)$ vertical. On en réduit progressivement la taille, ainsi donc que celle de ses voisins. Le tore prend alors le nom de cyclide de Dupin. Le tore bleu précédent, éclairé par un faisceau lumineux non perpendiculaire au plan équatorial du tore, a pour image une telle cyclide.



Lorsque le serrage du tore prend fin, le cercle cobaye en est réduit à n'être qu'un seul point. On dira que le tore est pincé en ce point dit singulier.

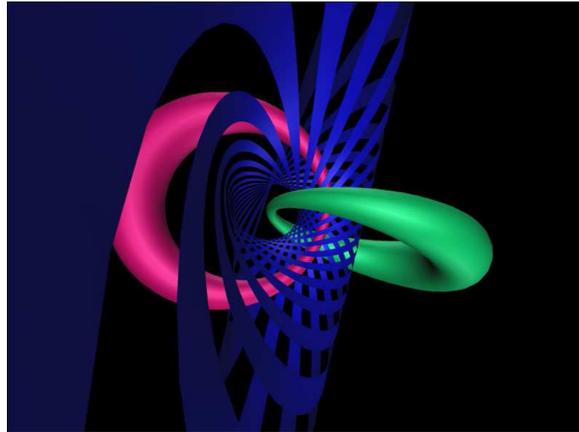
Une autre manière d'obtenir ce tore pincé consiste à prendre notre sphère habituelle, à l'allonger dans le sens sud-nord de sorte qu'elle prend une forme proche de celle d'un ellipsoïde, d'un boudin. On l'étire encore si nécessaire, puis on la courbe de manière à faire que pôle nord et pôle sud se touchent : on a bien un obtenu un tore pincé. En éclatant, déployant au contraire le point singulier en cercles, on reconstitue le tore initial.

Jusqu'à présent, nous avons considéré la sphère habituelle comme un millefeuille de cercles situés sur des plans parallèles. Mais il y a bien d'autres façons de découper la sphère en cercles : à l'aide de plans hachoirs passant par l'axe nord-sud, on peut par exemple la découper en grands cercles méridiens passant par les pôles sud et nord ; on peut aussi, à l'aide de nos hachoirs passant tous par le pôle nord, et pivotant autour de ce point, la découper en cercles passant tous également par le pôle nord.



La fabrication du tore pincé à partir de la 2-sphère ainsi feuilletée, puis son éclatement, permet de mieux voir comment sont maintenant disposés les cercles $S_1(s)$ sur le tore bleu de Banchoff.

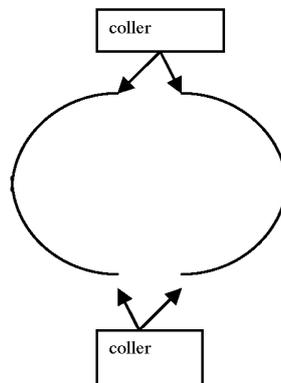
L' image qui suit met bien évidence les tores enlacés que le « regard » voit en forme de cyclides de Dupin.



Tom Banchoff

Nous allons maintenant aborder une autre manière de construire la sphère S^3 , elle ne fait que généraliser une manière de construire les sphères S^1 et S^2 .

Pour construire le cercle ordinaire S^1 , il suffit de prendre deux segments, deux bouts de fils, et de les coller par les extrémités qui se correspondent.



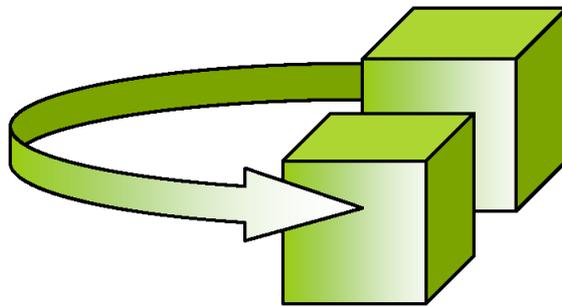
Dans le patois des mathématiciens, le segment est un élément de courbe, un objet de dimension 1, noté D_1 , dont les extrémités forment les deux points d'un cercle S^1 , le bord de D_1 . La sphère S^1 s'obtient par identification (impliquant le collage) des bords de deux D_1 (segments, bouts de fil). Pareillement, un élément de surface en forme de disque plat ou non, de coupelle, de bol sans épaisseur, est noté D_2 ; il a pour bord un cercle S^1 ... Lorsqu'on prend deux de ces bols, qu'on les renverse l'un sur l'autre, et qu'on les colle selon leur bord commun qu'on n'aperçoit plus, on obtient la sphère ordinaire S^2 .

De la même façon, pour construire la sphère S^3 , on prendra deux boules D^3 (les boules du pétanqueur) qu'on collera selon leur bord commun, la sphère S^2 .

Or une boule de pétanqueur peut s'obtenir simplement en déformant un cube plein, dont le bord est un cube creux, qui a 6 faces. Si donc on colle deux cubes pleins selon leur bord commun, qui est le cube creux, on obtient un objet déformable en la sphère S^3 .

Par ailleurs, si on prend un tel cube plein, qu'on allonge en un parallélépipède plein, et qu'on colle deux faces opposées, on obtient un tore plein. Notons qu'en supposant ces deux faces tournées l'une par rapport à l'autre de 180° on obtient un tore torsadé.

Si donc on reprend nos deux cubes ou parallélépipèdes pleins, ils totalisent $6 + 6 = 12$ faces, que l'on commence par identifier une face du premier à une autre du second, ce qui les accole, puis les faces opposées correspondantes, on obtient un premier tore plein dont la section est carrée, sur lequel apparaissent $12 - 4 = 8$ faces, 4 faces de ce qui appartenait au premier demi-cube devant être identifiées à 4 faces de ce qui appartenait au second cube.



Il suffit pour cela de couper ce tore plein en ces deux moitiés selon les faces déjà identifiées, ce qui donne deux demi-tores que l'on complète en tores en identifiant à nouveau les faces qui viennent d'être séparées. Chacun de ces tores à section carrée portent 4 faces, les 4 faces du premier devant être identifiées aux quatre faces du second.

La 3-sphère s'obtient donc par identification des bords de ces deux tores pleins.

Une autre justification de ce fait est la suivante. Partons à nouveau du fait que la 3-sphère peut s'obtenir en associant un $S^1(s)$ à tout point s situé sur un S^1 cercle du millefeuille sphérique. Partageons cette sphère en deux coupelles, en deux moitiés égales, chacune ayant pour bord l'équateur. On reconstitue la sphère en identifiant les bords de ces coupelles.

Prenons une de ces coupelles, disons celle qui contient le pôle Nord. La projection sur le plan tangent à ce pôle des cercles de la coupelle forme un disque plat, feuilleté par les cercles projetés, ayant pour centre le pôle. Chacun de ces cercles donne naissance à un tore creux, fut-il singulier comme celui associé au pôle nord, un cercle de rayon nul : l'ensemble de ces tores creux constitue un tore plein. Le bord de ce tore plein « nord » est le tore creux formé à partir du cercle équatorial, il est composé de S^1 enlacés, des fibres de Hopf.

De la même façon, on construit un tore plein « sud » avec la coupelle portant le pôle sud. Il a le même bord que le tore « nord ».

L'identification des deux tores pleins par leur bord commun reconstitue la 3-sphère.

Le tableau de Benno Artmann est une illustration symbolique de cette construction. Il s'agit en fait d'une photographie d'un petit plâtre (hauteur 35 cm) fait des mains de l'auteur. Les deux tores sont enlacés, les torsades représentent les fibres de Hopf.



Benno Artmann

Une remarque pour conclure : on peut envisager toutes les sphères comme appartenant à une forme parfaite du déploiement d'un point, considéré comme cercle de rayon nul. Il existe une variante de ce déploiement lorsque le point se déploie en une famille de tores. Les deux formes de déploiement sont fortement liées.

Le premier stade de ces déploiements leur est commun, le tore T^1 n'étant n'est autre chose du point de vue topologique que le cercle S^1 . La différence entre les deux déploiements apparaît dès la seconde dimension, mais reste stable ensuite. Nous avons déjà largement rencontré le tore $T^2 = S^1 \times S^1$. Plus général est le tore $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$, S^1 apparaissant n fois. Chaque S^1 étant décrit par la variation d'un seul angle, n angles $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, décrivent ce tore T^n . Le fait intéressant quoique élémentaire est que ces mêmes n angles suffisent mais sont aussi nécessaires pour obtenir l'équation cartésienne de la n -sphère.

2. Les pavages du disque par Jean Constant, Jos leys et Radmilla Sazdanovic

Poursuivons notre visite. Non, non, nous ne nous arrêtons pas devant le tableau suivant, nous allons vers le fond du couloir, quelque chose comme le symétrique de l'entrée.

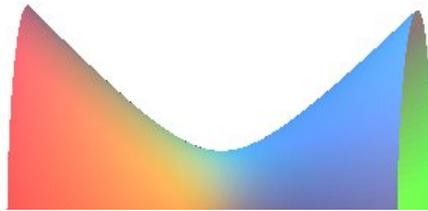
Ce sont les œuvres rondes de Jean Constant, de Jos Leys et de Radmilla Sazdanovic qui vont d'abord retenir notre attention. Le thème mathématique qu'elles illustrent est celui du pavage du disque dit hyperbolique de Beltrami-Poincaré, introduit par le mathématicien italien Beltrami.

Qu'entend-on par géométrie hyperbolique ?

Le sol sur lequel nous marchons est appelé par les mathématiciens une surface. La géométrie sur un élément de surface est caractérisée par les propriétés d'un triangle dessiné sur cet élément.

On démontre qu'il n'y a que trois possibilités, trois types de surface :

- 1) sol plat, la somme des angles d'un triangle vaut 360° , la géométrie est celle que l'on étudie dans les collèges et lycées, elle est dite euclidienne.
- 2) Sol sphérique, la somme des angles d'un triangle est supérieure à 360° : la géométrie est sphérique
- 3) Sol ayant la forme d'un col entre deux montagnes, d'une selle de cheval,



la somme des angles d'un triangle y est inférieure à 360° : la géométrie est dite hyperbolique car cette forme est celle de la surface mathématique engendrée par la rotation d'une hyperbole autour de l'axe ne la rencontrant pas, et appelée l'hyperboloïde à une nappe:

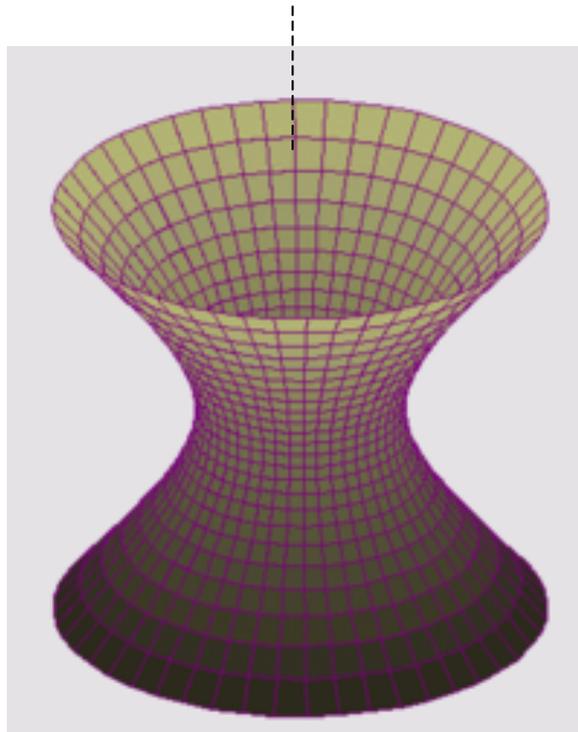
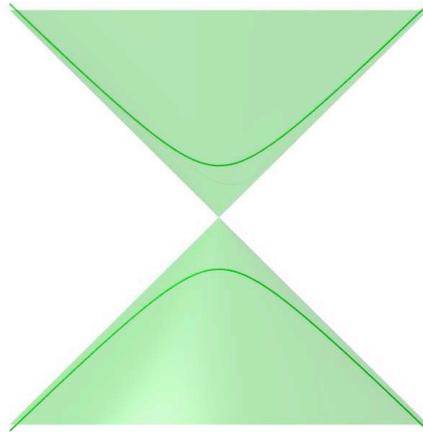


Image empruntée à Wikipédia

En faisant tourner une hyperbole autour de l'axe qui la traverse, on obtient



Jos Leys

l'hyperboloïde à deux nappes, qui se présente sous la forme de deux coupelles, de deux vases infinis symétriques l'un par rapport à l'autre.

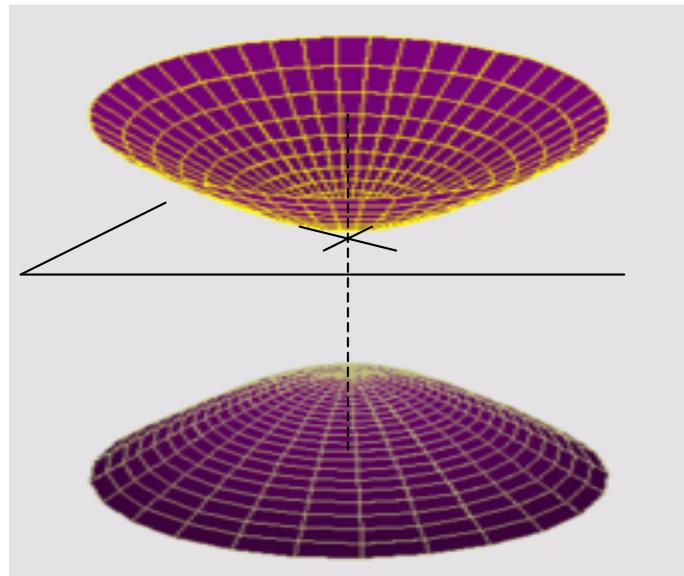


Image empruntée à Wikipédia

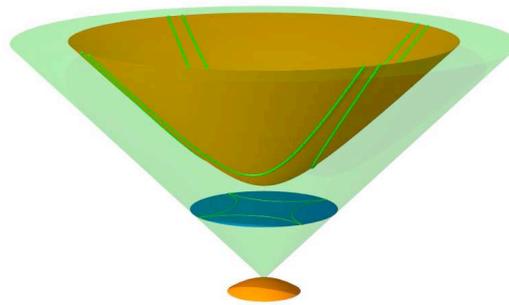
Quoique jumeaux par la même hyperbole génératrice, les deux hyperboloïdes diffèrent par leur géométrie, du type hyperbolique pour le premier, sphérique pour le second.

Il n'empêche que l'un et l'autre portent le même espace d'hyperboles : en particulier les sections par des plans passant par le centre de symétrie de l'hyperboloïde à deux nappes par exemple sont des hyperboles.

C'est cet espace d'hyperboles que nous allons représenter sur un disque par leur projection dite stéréographique.

Un faisceau lumineux conique issu du pôle sud de l'hyperboloïde à deux nappes en éclaire la partie supérieure. Les rayons de ce faisceau sont à l'intérieur du cône défini par les asymptotes à l'hyperbole génératrice et qui entoure l'hyperboloïde.

Le rayon lumineux qui frappe l'hyperboloïde en un point traverse le plan de symétrie en un point qui constitue l'image du point sur l'hyperboloïde.



Jos Leys

L'intersection du faisceau lumineux conique avec l'«écran» formé par le plan de symétrie est le fameux disque de Beltrami-Poincaré, encore appelé le disque hyperbolique.

L'image de l'hyperbole sur la surface est, dans le plan du disque, un cercle orthogonal au cercle qui borde ce disque

Naturellement, davantage est éloigné du pôle nord un triangle sur l'hyperboloïde, plus petit est son image sur le disque.

Sur l'hyperboloïde, un arc d'hyperbole a une certaine longueur. Par la projection stéréographique, cet arc d'hyperbole devient, dans le plan, un arc de cercle, auquel on attribue, par convention, la longueur précédente. On dit que le disque est muni de la métrique hyperbolique.

On entend par pavage d'un domaine un ensemble de parties du domaine, toutes identiques, appelons-les des pavés, qui, pouvant se toucher en leur bord mais point se chevaucher, permettent de remplir le domaine sans qu'il y ait de vide.

Pour réaliser un pavage, on suppose qu'on dispose en un lieu sûr d'une quantité suffisante de pavés, qu'on met en place, qu'on déplace.

Le mouvement que chacun d'eux accomplit est représenté par un nombre. La sémantique d'un nombre est assez riche car il peut représenter une quantité, il peut désigner une position sein d'un ensemble ordonné, plus fondamentalement il représente un mouvement.

Anticipant un résultat du mathématicien du 19^e siècle, Liouville – à moins que celui-ci de ne soit inspiré du Stagirite – Aristote énonça qu'il y avait dans le monde physique trois types de mouvement, celui de translation, celui de rotation, et le mixte. Il considérait que le mouvement de rotation, parfait par nature, était antérieur au mouvement de translation.

Une translation, en dimension 1, est représentée par un nombre qu'on dit réel ; une rotation, en dimension 1, est représentée par nombre qu'on appelle un angle. Un mouvement mixte qui associe la translation ou la dilatation avec la rotation est représentée par un nombre noté fréquemment z , jusqu'ici dit nombre complexe, que j'ai appelé aussi nombre de

Chuquet-Cardan du nom de celui qui les a introduits (Chuquet) et de ses premiers utilisateurs, et que je propose d'appeler ici nombre mixte de dimension 1.

Ces nombres ne rendent pas compte d'une autre transformation qui a la vertu de toujours conserver les angles : l'objet déplacé peut être tourné par rapport à sa position initiale, il peut être de taille petite en certaines de ses parties, l'angle qu'elles font entre elles est inchangé.

Ce mouvement est représenté par ce que nous appellerons désormais le nombre homographique h . De même que le nombre mixte z peut s'écrire à partir de deux nombres réels ($z = x + i y$ où i représente en fait une rotation de 90°), h s'écrit de manière la plus générale à partir de nombres mixtes sous la forme :

$$h = \frac{az + b}{cz + d}$$

Cette expression de h a été introduite par Euler en 1777. Le mathématicien allemand Möbius a montré en 1855 toute la richesse géométrique attachée à ce nombre, c'est-à-dire tous les mouvements possibles qu'il peut préciser.

Ces nombres, donc ces mouvements, se composent entre eux, présentent une propriété de réversibilité, et s'organisent en cette structure très stable qu'on nomme une structure de groupe.

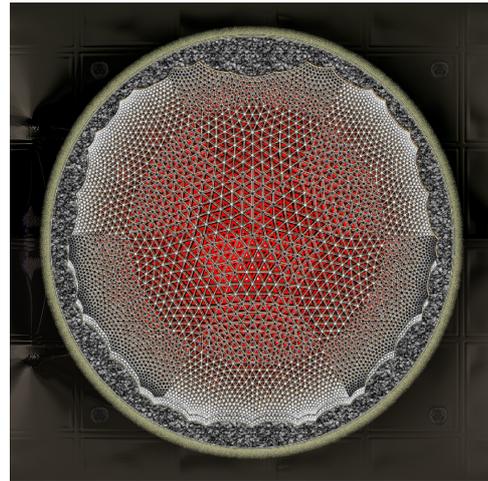
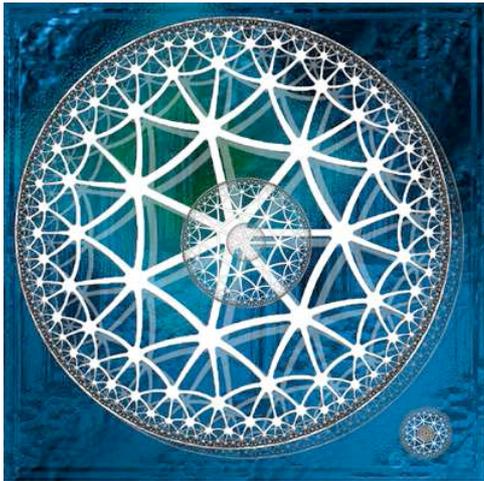
Supposons qu'on veuille paver la droite par de pavés de longueur 1, supposés placés tous en un point de la droite noté 0. On place le premier qui occupe le segment d'origine 0 et d'extrémité 1. Pour placer le second disons à droite du premier, il faut donc prendre un autre pavé et lui faire accomplir un mouvement de translation de longueur 1. Pour placer un troisième pavé, il faudra décaler le pavé choisi de deux translations de longueur 1. Cet exemple pour souligner qu'on ne fait, lors de ce pavage par des motifs identiques, que des déplacements représentés par des nombres entiers : le groupe de mouvements qu'ils constituent est appelé discret, au contraire de déplacements qui seraient représentés par des nombres quelconques, pouvant être aussi près les uns des autres que cela serait nécessaire, et qui formeraient un groupe continu.

Paver l'hyperboloïde par des motifs identiques implique donc que le groupe des déplacements des motifs soit discret. Si l'on part d'un polygone régulier dont le centre est également celui du disque image de l'hyperboloïde, le mouvement qui le déplace en l'un des ses voisins doit en diminuer la taille, tout en en conservant les angles.

Poincaré, comme son contemporain le mathématicien allemand Immanuel Fuchs, travaillait sur la théorie des équations différentielles. Fuchs a montré l'invariance de certaines d'entre elles par des nombres homographiques h . Inspiré par ce travail de Fuchs, Poincaré a vu que le groupe de mouvements qui permettait de réaliser le pavage sur le disque hyperbolique était un groupe discret de nombres homographiques h . Ce groupe est ici un peu particulier puisque en répétant l'action de h on finit par avoir des polygones dans le plan de plus en plus petits, la limite atteinte étant celle du cercle qui borde le disque. C'est ce groupe particulier que Poincaré a nommé fushien.

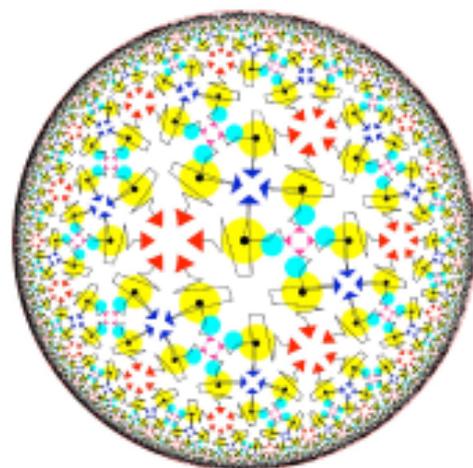
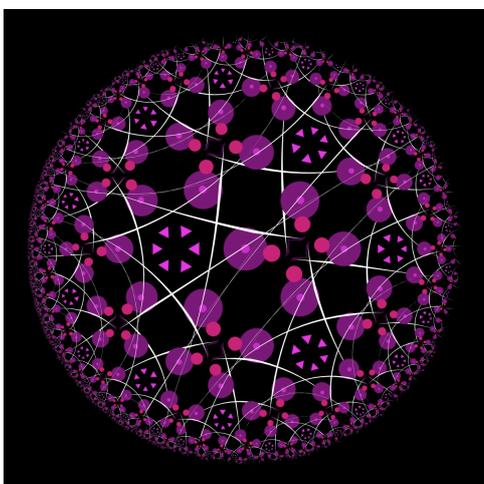
Jean Constant et Radmilla Sazdanovic nous présentent des œuvres dont les arrière-plans sont des pavages du disque hyperbolique.

Jean Constant, qui est artiste, ne calcule ni le motif et le pavage : il les emprunte à des mathématiciens, et se sert de l'ordinateur comme d'un crayon, d'un fusain, ou d'une palette, pour faire vivre, faire respirer les objets mathématiques dans l'espace usuel, en leur donnant des teintes, des couleurs, des éclairages, un relief qui créent des illusions d'espace et de mouvement.



Jean Constant

Le travail de Radmilla Sazdanovic est tout autre, relève d'un état d'esprit différent. Mathématicienne, Radmilla a travaillé sur ce disque hyperbolique et accompli le travail de programmation nécessaire à la réalisation de ses œuvres. Leur contenu mathématique est plus riche que celui des œuvres précédents. Mais la vocation artistique est différente, ici décorative.

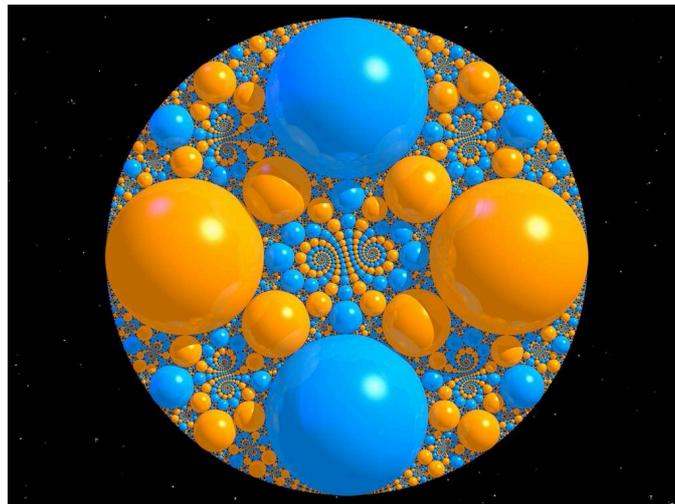


Radmilla Sazdanovic

Les œuvres de Jean Constant reposent sur le même pavage classique du disque par des seuls triangles équilatéraux, chacun entouré par sept autres triangles, alors que les œuvres de Radmilla Sazdanovic font appel à un pavage hexagonal régulier où chaque sommet est commun à quatre hexagones.

Le fait que chaque sommet du polygone régulier soit le bord de q arêtes implique que l'angle en un sommet de chaque polygone soit égal à $360^\circ/q$. Si le polygone régulier possède p côtés, on peut le diviser en p triangles isocèles égaux ayant pour sommet commun le centre du polygone ; l'angle de chaque triangle en ce sommet commun vaut donc $360/p$. Chaque côté de ce triangle qui n'est pas sur le polygone, le rencontre en l'un de ses sommets, et partage en deux moitiés égales l'angle du polygone en ce sommet. La somme des angles de ce triangle hyperbolique vaut donc $360^\circ/2q + 360^\circ/p + 360^\circ/2q$; elle est inférieure à 180° puisque le triangle est hyperbolique, d'où la relation $1/p + 1/q < 1/2$ qui implique une possibilité infinie de pavages du disque par des polygones réguliers.

Le visiteur rencontrera à la bibliothèque d'autres pavages du disque, en mosaïque par Irène Rousseau, à la Escher par Jos Leys. Il admirera ici une autre œuvre de Jos Leys.



Jos Leys

Elle illustre la réponse à une question posée par le mathématicien allemand Félix Klein : peut-on parvenir à remplir un disque avec d'autres disques, de tailles plus petites bien sûr. Cette réponse est positive, dont les éléments sont décrits en fort grand détail dans ce très beau livre publié par un trio de mathématiciens : David Mumford (un médaillé Fields comme Perelman), Caroline Series, David Wright. Le livre s'intitule **Indra's Pearls, The vision of Felix Klein**, et a été publié pour la première fois en 2002 par Cambridge University Press. Admirablement écrit, il est accessible à tous, le lecteur devant être simplement patient avant d'atteindre l'épilogue. Si je puis me permettre, je ferai une remarque à son propos, elle ne concerne pas d'ailleurs ces auteurs de manière spécifique. En matière d'histoire de leur discipline, les mathématiciens d'aujourd'hui ont tendance à s'en tenir aux seuls énoncés de leurs prédécesseurs, traçant un trait sur leur formation, leurs lectures, leur milieu, leurs relations. Or en matière de considérations sur la symétrie et sur la notion de groupe en tant que groupe de transformations, on ne peut faire abstraction de l'influence sur Klein du

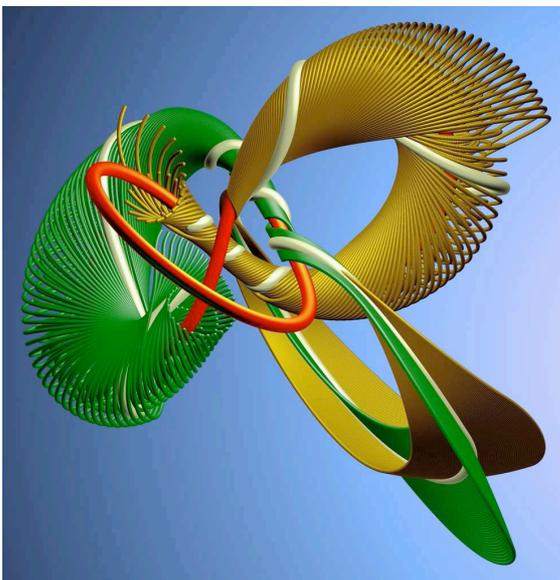
cristallographe Bravais, et surtout de celle du physicien Helmholtz, sans lequel, vraisemblablement, le programme d'Erlangen n'aurait pas été énoncé.

Mais revenons au tableau de Jos Leys: sa construction fait notamment un appel constant au groupe et à certains sous-groupes des homographies h . Les trois œuvres de Jos Leys qui se trouvent dans l'entrée de la bibliothèque relèvent de la même problématique et des mêmes techniques mathématiques, parfaitement maîtrisées par cet artiste.

3. L'étude des mouvements à travers deux œuvres de Jos Leys

Poincaré a consacré une part importante de son temps à l'étude des mouvements, c'est par elle qu'il est devenu rapidement célèbre. Etude quantitative certes, mais aussi étude qualitative, une branche des mathématiques qu'il a créée : il arrive qu'on ne puisse pas parvenir à préciser les données numériques qui déterminent localement les caractéristiques du mouvement, au moins peut-on en décrire les modalités de son comportement et de son devenir. Se dirige-t-on par exemple vers une situation figée, ou bien en état de rotation uniforme, ou au contraire abandonne-t-on définitivement ce genre d'état ? Quelle peut être l'influence d'une petite variation des données initiales sur le comportement futur ?

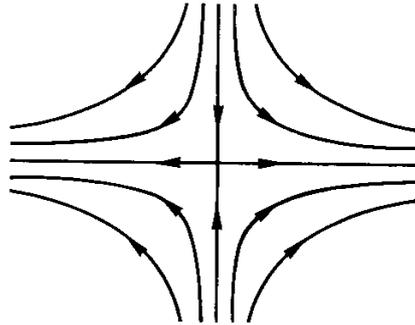
Ces deux œuvres de Jos Leys montrent des trajectoires associées à des situations intéressantes.



Jos Leys

Dans l'œuvre de gauche, elle a orné la couverture du numéro de Janvier 2007 des *Notices de l'American Mathematical Society*, deux trajectoires respectivement teintées en or et en vert s'enroulent autour d'un nœud de trèfle coloré en rouge : ces trajectoires viennent d'abord s'enrouler autour du nœud qui joue le rôle d'une attracteur, mais finissent par le quitter, le nœud joue alors le rôle d'un répulseur. Un tel système dynamique est dit d'Anosov, du nom du mathématicien russe qui l'a étudié en grande généralité il y a une quarantaine d'années. Le cas particulier décrit par Poincaré, et à l'origine de cette étude, est celui où les trajectoires se

rapprochent d'un point ayant alors un pouvoir attractant, puis s'en éloignent alors qu'il exerce une action dite répulsive. Le point peut éclater en une courbe fermée comme c'est le cas dans la situation visualisée par le tableau. Ce point que nous venons de considérer est appelé un point col ou un point-selle: regardons la petite figure de la page 14 qui représente un col ou une selle, et imaginons que nous la coupions par des plans horizontaux parallèles entre eux : les sections ont la forme des courbes-trajectoires suivantes (décrites par les équations de parcours temporel $(x(t) = x(0) e^{at}, y(t) = y(0) e^{-bt})$ a et b étant ici deux nombres réels positifs) :



Comme cette situation est caractéristique de la géométrie hyperbolique, le système dynamique porte également le nom d'hyperbolique.

Il possède la propriété générale d'être structurellement stable, une légère perturbation des paramètres – ici a et b – ne modifiant pas le comportement général du système.

Le contenu du second tableau n'est pas étranger à celui du premier. Le météorologue Lorenz a établi un modèle des courants de convection dans l'atmosphère. C'est d'abord par la visualisation des trajectoires qu'est apparu le caractère étrange et chaotique du système. Cette visualisation première se présentait sous une forme un peu différente de celle que l'on voit dans le tableau présent, elle rappelait les deux ailes d'un papillon ; d'où est venue l'appellation d'effet papillon au fait qu'une perturbation apparemment insignifiante en un endroit peut avoir des conséquences très importantes dans un autre lieu, qui peut être fort éloigné du premier tant dans l'espace que dans le temps.

On a fait de Poincaré le premier à avoir énoncé la présence possible de tels phénomènes, mais à vrai dire il s'agit là d'un fait pressenti depuis fort longtemps (cf. les citations de Galilée et d'Alexandre Dumas que donne, en ses pages 21 et 22. <http://www.chass.utoronto.ca/epc/srb/cyber/bruter5.pdf>)

Un des points communs essentiels entre les deux tableaux est la présence de nœuds de trèfle : ils dessinent la forme des attracteurs périodiques associés au système de Lorenz.

4. Le dodécaèdre : Charles Gunn, John Sullivan et Poincaré

Poursuivant notre visite, revenant sur nos pas, nous rencontrons une grande impression sur toile signée Charles Gunn, alors que symétriquement, venant de l'entrée, se trouve sur notre gauche un tableau de John Sullivan intitulé 119 Bubbles. Lui fait pratiquement face une vitrine, où l'on voit deux photographies où Poincaré est présent, et un grand poster à fond

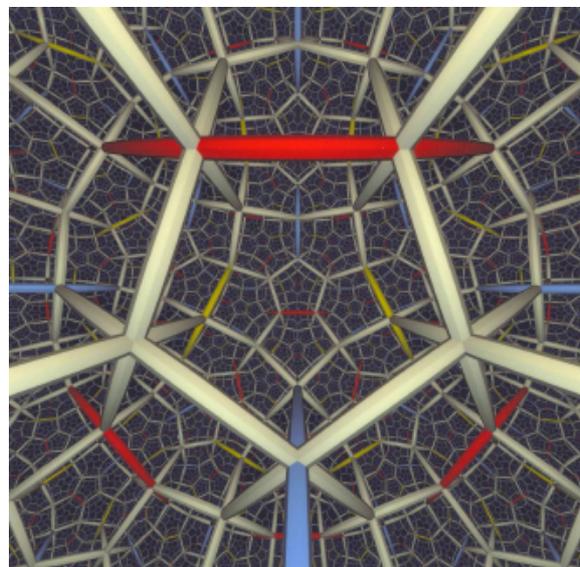
jaune consacré à une « Triangulation of the Poincaré Homology 3-sphere ». Il se pourrait que le poster et les œuvres susnommées aient quelques points communs.

L'équivalent en trois dimensions du disque de Beltrami-Poincaré D^2 muni de sa métrique hyperbolique est la boule D^3 qu'on va munir de la métrique hyperbolique. On a vu qu'on pouvait paver le disque par des polygones réguliers hyperboliques: ce sont les images de polygones réguliers d'un même type tracés sur l'hyperboloïde, leurs côtés sont des morceaux d'hyperboles qui ont pour images sur le disque soit des segments rectilignes, soit plus généralement des portions de cercle; et lorsqu'ils se trouvent bien loin vers l'infini sur l'hyperboloïde, leurs images sont évidemment toutes petites sur le disque.

Un phénomène analogue se produit lors du pavage de la boule hyperbolique, réalisé cette fois-ci avec l'équivalent en trois dimensions de polygones que sont des polyèdres.

Les polygones hyperboliques ont génériquement pour côtés des arcs de cercle, les polyèdres hyperboliques génériques ont pour face des portions de notre sphère habituelle S^2 . Seuls quelques polyèdres hyperboliques réguliers peuvent paver la boule hyperbolique: c'est le cas du dodécaèdre hyperbolique.

La toile sur laquelle est imprimée l'œuvre de Charles Gunn nous a été offerte par nos collègues allemands qui ont créé un musée itinérant, Imaginary. L'image est extraite de la vidéo NotKnot créée en 1991 à l'Université du Minnesota. Nous y voyons un élément d'une représentation de l'espace hyperbolique à trois dimensions, pavé par des dodécaèdres qui, par effet de perspective, nous paraissent de plus en plus petits qu'ils sont plus éloignés de nous, et dont les faces sont planes et non pas sphériques.



Espace hyperbolique.

Charles GUNN

La raison est que la représentation de l'espace hyperbolique est un peu différente de celle que nous avons utilisée jusqu'à présent. Dans celle-ci, en dimension 2, le faisceau lumineux qui donnait l'image de l'hyperboloïde était issu du pôle sud. Si maintenant nous plaçons la source de lumière au centre de l'hyperboloïde, le plan d'intersection passant par ce centre qui coupe

l'hyperboloïde selon une hyperbole, coupera le plan équatorial selon une droite - l'intersection de deux plans quelconques est une droite. C'est cette représentation de l'espace hyperbolique, dite de Klein, qui est utilisée par Charles Gunn – l'intersection de deux sphères demande sans doute davantage de temps de calcul que l'intersection de deux plans.

En soufflant à l'intérieur d'un dodécaèdre aux faces élastiques, on obtient la sphère ordinaire: de notre point de vue topologique, il s'agit du même objet. Le dodécaèdre ayant des faces pentagonales, on peut considérer que la sphère ordinaire peut être pavée par des pentagones réguliers.

Y aurait-il un pavage de ce genre pour la sphère S^3 ? Une construction de Poincaré apporte une réponse positive.

Avec un ruban de papier, on construit aisément un tore : en courbant la bande dans le sens de la longueur on parvient à coller les côtés allongés, on les identifie et on obtient ainsi un tube. En courbant le tube, on identifie les deux cercles situés en ses extrémités, c'est-à-dire qu'on les colle, on a obtenu le tore.

L'exercice est moins facile à réaliser avec les faces d'un dodécaèdre, ce qu'a pourtant fait Poincaré. Il identifie les faces opposées en les faisant tourner d'un angle convenable. L'espace obtenu est appelé l'espace dodécaédrique de Poincaré : 120 d'entre eux permettent de paver la 3-sphère, ou encore définissent un hyper-polyèdre dans l'espace euclidien à quatre dimensions, doté de 120 côtés, et dont les faces sont des dodécaèdres réguliers tridimensionnels.



John Sullivan

L'œuvre de John Sullivan nous montre une projection stéréographique dans notre espace usuel de cet hyper polyèdre.

Poincaré a conçu le moyen d'associer des ensembles de nombres structurés en groupes aux domaines les plus courants d'un espace et appelés « groupes d'homologie »: le fait

que deux domaines partagent ces mêmes groupes entraîne parfois leur équivalence en un sens mathématique précis.

Poincaré a pensé un moment que si la 3-sphère et un autre domaine compact de l'espace à 4 dimensions possédaient les mêmes groupes d'homologie, ledit domaine était continûment déformable en la sphère. L'énoncé est du même genre que celui de la fameuse ex-conjecture.

Il a fallu déchanter, Poincaré lui-même trouvant un contre-exemple, l'objet obtenu par identification de leur bord de deux tores pleins à deux trous chacun – on a vu que si ces tores sont de genre 1 (ce sont les tores habituels à un seul trou), le résultat de l'identification est bien la 3-sphère.

Le poster des mathématiciens Anders Björner et Frank Lutz donne une autre construction, inspirée de celle de mathématiciens fort actifs pendant la première moitié du vingtième siècle, Siefert et Threlfall. Peut-être certains seront sensibles à l'esthétique de cette œuvre mathématique, à la qualité de sa présentation, à la créativité qu'elle révèle et que partagent nombre de mathématiciens et artistes.

5. La surface de Kuen vue par Richard Palais & Luc Bénard : fin de la visite du rez-de-chaussée

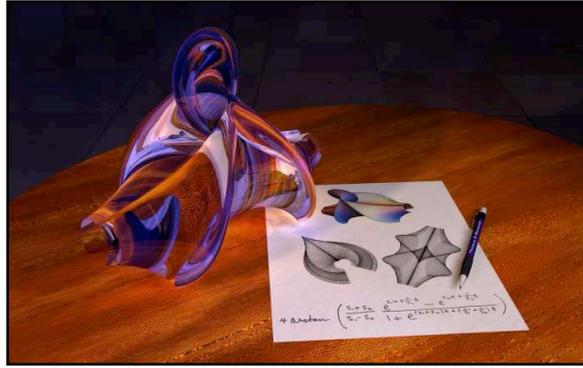
Poincaré aura beaucoup contribué à la connaissance du monde hyperbolique d'une très grande richesse, en particulier, on l'a vu par le rôle éminent qu'il a fait jouer au groupe des homographies, qu'il nommait d'ailleurs le groupe hyperbolique.

Sur une surface, comme celle d'une montagne, on peut a priori trouver des singularités, c'est-à-dire des pointes, des pics, des courbes composées uniquement de tels pics. En dehors de ces singularités, les points de la surface sont dits réguliers, et par chacun de tels points passent deux courbes tracés sur la surface et perpendiculaires entre elles. Chacune de ces courbes possède en chaque point une courbure, la courbure totale de la surface en un tel point étant le produit des deux courbes perpendiculaires qui s'y croisent.

Si en ce point, comme celui situé en plein milieu d'un col ou d'une selle, l'une des courbes a l'air d'une parabole tournée vers le haut, alors que la courbe perpendiculaire ressemble également à une parabole mais tournée vers le bas, les deux courbures locales des courbes sont de signe opposé, et la courbure totale est négative.

Ainsi, une surface qui ressemble localement à un col ou a une selle, qu'on a appelé dans les premières pages hyperbolique, a une courbure locale négative, et c'est ce qui caractérise les surface hyperboliques, si nombreuses. La valeur de la courbure totale change en général quand on se déplace sur la surface.

Il existe toutefois des surfaces dont la courbure totale est en tout point régulier négative et constante, sauf bien sûr en ses singularités. Appartenant à toute une famille de telles surfaces mise en lumière par Enneper vers 1863, c'est le cas d'une surface particulière, d'une morphologie inattendue, assez complexe et dotée d'une ligne de singularités: découverte et étudiée en 1884 par T. Kuen, elle en porte le nom.



Richard Palais & Luc Bénard

C'est la partie centrale de cette surface intrigante que Luc Bénard, en collaboration sur le plan mathématique avec Richard Palais, a mise en valeur à travers une maîtrise remarquable des jeux de lumière, l'ordinateur et la programmation des couleurs permettant d'atteindre une précision, une finesse, une exactitude que les meilleurs peintres d'autrefois ne pouvaient atteindre. Ce tableau a été primé en 2009 par la National Science Foundation.

D'autres surfaces hyperboliques, apparues plus récemment, dans la seconde moitié du vingtième siècle, comme solutions d'équations aux dérivées partielles issues de l'hydrodynamique, ont également attiré le regard curieux et imaginaire d'autres artistes. Bien des œuvres de Jean Constant que l'on verra à la bibliothèque en porteront témoignage.

En bibliothèque, en ce mois de Juin 2010

75 œuvres sont exposées dans la bibliothèque. Sans compter les abondantes sculptures que l'on peut admirer dans les vitrines, sculptures permanentes, ou temporaires avec des œuvres de :

François APÉRY, Philippe CHARBONNEAU, Richard DENNER, George HART, Dmitri KOZLOV, Hervé LEHNING, Philippe RIPS,

Dans l'entrée, sont 13 œuvres de:

Tamás FARKAS (2), Mike FIELD (4), Jos LEYS (3), Slavik JABLAN (2), François TARD (2).

Dans le couloir donnant sur l'extérieur du bâtiment, sont 10 œuvres de :

John SULLIVAN (4), Ulrich PINKALL (1), Luc BÉNARD (2), Patrice JEENER (2), Jos LEYS (1).

Au fond de la bibliothèque, sont 22 œuvres de:

Jos LEYS (5), Jean-François COLONNA (2 + 6), Mike FIELD (2), Dick TERMES (3), Tom BANCHOFF (1), François TARD (2), David AUSTIN-Bill CASSELMAN-David WRIGHT (1)

Dans le couloir muni des consoles d'ordinateur, sont 8 œuvres de:

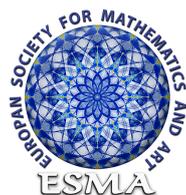
Sylvie PIC (2), Miroslav ZEC (1), Oliver LABS (1), Luc BÉNARD (1), Herwig HAUSER (2), Tom BANCHOFF (1)

Dans la salle de lecture, sont 22 œuvres de:

Benno ARTMANN (1), Jean-François COLONNA (1), Jean CONSTANT (11), Patrice JEENER (6), Irène ROUSSEAU (3).

Et, enfin, un Livre d'Or.





MATHEMATIQUE ET ART
INSTITUT HENRI POINCARÉ

7 JUIN – 25 JUILLET 2010

EXPOSANTS & INTERVENANTS

François APÉRY	Slavik JABLAN
Benno ARTMANN	Patrice JEENER
Boris ASSANCHEYEV	Dmitri KOZLOV
David AUSTIN, William CASSELMAN, David WRIGHT	Oliver LABS
Tom BANCHOFF	Hervé LEHNING
Luc BÉNARD & Richard PALAIS	Jos LEYS
Anders BJÖRNER & Frank LUTZ	Sylvie PIC
Philippe CHARBONNEAU	Ulrich PINKALL
Jean-François COLONNA	Philippe RIPS
Jean CONSTANT	Irène ROUSSEAU
Richard DENNER	Radmilla SAZDANOVIC
Tamás FARKAS	John SULLIVAN
Mikael FIELD	François TARD
Charles GUNN	Dick TERMES
George HART	Miroslav ZEC
Herwig HAUSER	

François APÉRY

Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Cachan, Maître de Conférences à l'Université de Haute-Alsace, il a passé sa thèse sous la direction de Bernard Morin en topologie différentielle. Son centre d'intérêt touche à la géométrie et à la topologie en petites dimensions. Il aime à réaliser des objets physiques, figures en trois dimensions d'objets mathématiques.

Est présentée ici la trame d'une surface du sixième degré connue sous le nom de surface de Boy, du nom du mathématicien qui l'a imaginée en 1901. Cette surface a longtemps été un objet de nature abstraite dont les seules représentations étaient empiriques.

C'est seulement en 1983 que l'auteur en a obtenu une version algébrique, autrement dit une description par une équation polynomiale de degré six. La simplicité de cette définition a permis d'en réaliser des modèles concrets et exacts, comme celui qui figure ici.

Le principe qui a présidé à sa réalisation repose sur la nécessité de représenter un objet géométrique aussi fidèlement que possible, c'est-à-dire en respectant à la lettre les données algébriques issues des équations qui le définissent, en jouant par ailleurs sur certains degrés de liberté pour accentuer les qualités esthétiques, même si elles restent subjectives. Parmi ces degrés de liberté, figurent notamment le choix de l'échelle et des proportions, celui des matériaux.

Ce sont ces qualités, déjà exploitées pour les surfaces réglées, que l'on veut étendre à des surfaces engendrées par d'autres familles de courbes, et pour commencer, par des coniques comme les ellipses, en utilisant les propriétés mécaniques du fil métallique, notamment celles du fil d'acier du type corde à piano. Son élasticité se traduit par le fait qu'il ne garde pas la trace des déformations qu'il subit, pourvu qu'elles ne soient pas trop importantes. Un fil de longueur donnée soumis à des contraintes prend une position d'équilibre que matérialise une courbe. Si on impose, par exemple, aux extrémités de se toucher en un point donné suivant un angle plat, ce qui représente quatre contraintes, la position d'équilibre est un cercle.

Si maintenant on impose, en outre, au fil de passer par un second point du plan du cercle, ce qui fixe une cinquième contrainte, le fil prend comme position d'équilibre une courbe plane qui, dans le cas qui nous intéresse, sera convexe et peu différente d'une ellipse. D'où l'idée de construire une surface engendrée par des ellipses à l'aide d'un bâti sur lequel sont montés des fils d'acier astreints à satisfaire au moins cinq conditions. La surface représentée de cette façon donne, comme les surfaces réglées, l'impression de n'exister que virtuellement par le biais de ses contours apparents.



**Surface de Boy fibrée en cercles.
François APÉRY**

◆

Benno ARTMANN

Benno Artmann, né en 1933, travaille après la guerre et pendant quelques années comme maçon, puis reprend ses études, et obtient son Doctorat en mathématiques en 1965. Après avoir été professeur de mathématiques à l'Université Technique de Darmstadt jusqu'à sa retraite en 1998, il vient à Göttingen où il enseigne à mi-temps au Mathematisches Institut. Son hobby est la sculpture. Au début des années 80, les écrits de George Francis (qu'il avait connu à Ann Arbor) et celui de Thomas Banchoff paru dans *The Mathematical Intelligencer* l'incitèrent à réaliser des sculptures mathématiques.



Surface de Boy à 4 fenêtres.

Benno ARTMANN

Plâtre, hauteur 40 cm, 1982.

(D'après une idée de George Francis)



3-sphère décomposée en 2 tores.

Benno ARTMANN

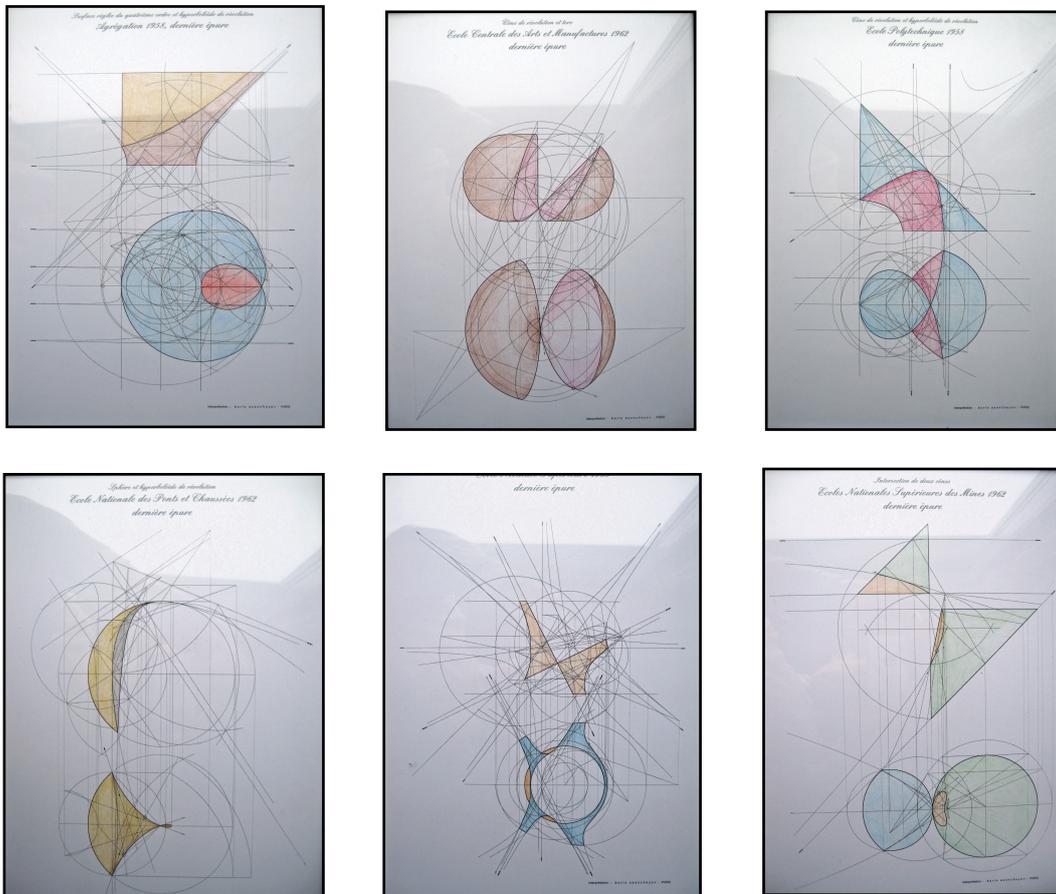
Plâtre, hauteur 35 cm, 1988.

◆

Boris ASSANCHEYEV

Né en 1938 à Paris, il a été Maître de Conférences à l'École Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École Spéciale des Travaux Publics, et ingénieur-conseil, notamment pour le calcul des structures. Il s'est passionné pour les épures de géométrie descriptive, une discipline qui figurait autrefois aux concours des grandes écoles scientifiques. Son ouvrage « Epures de Géométrie descriptive » publié aux éditions Hermann en montre 79 parmi celles qui ont servi d'épreuve au concours d'entrée à l'ENS. Leur dessin en a été réalisé par l'ordinateur.

La géométrie dite « descriptive » a été introduite par Monge à la fin du dix-huitième siècle. Elle consiste à représenter un objet par ses projection sur un plan vertical (l'objet est vu de face) et sur un plan horizontal (une vue de dessus). Les objets traditionnels à représenter étaient pour la plupart des intersections de surfaces de rotation standard : plans, cônes, quadriques (ellipsoïdes dont la sphère, paraboloides et hyperboloides), tores.



Epures.
Boris ASSANCHEYEV

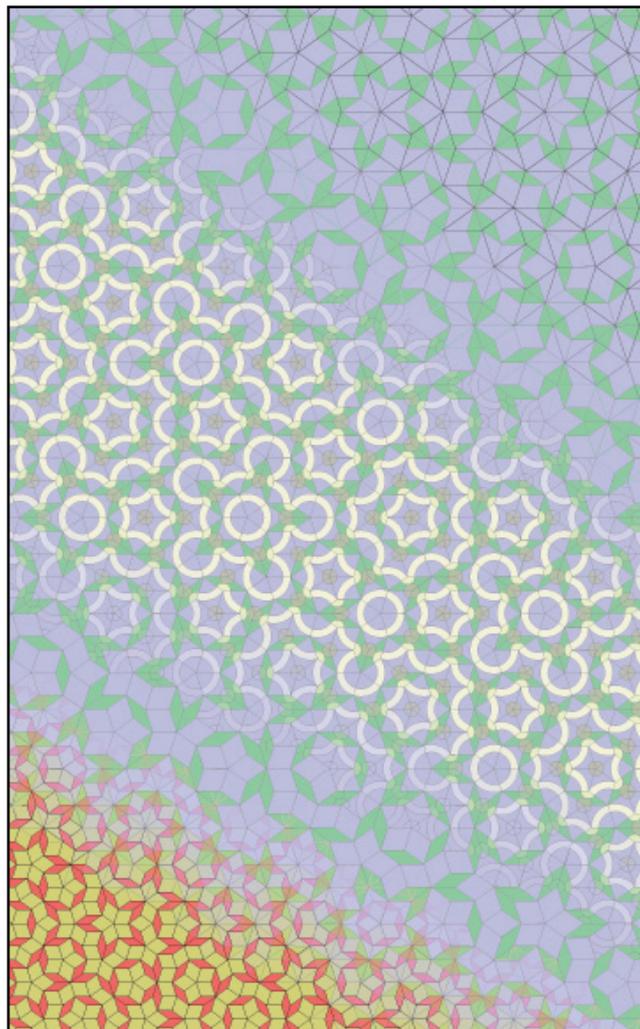
◆

AUSTIN David CASSELMAN William WRIGHT David

David Austin est professeur de mathématiques à l'université de Grand Valley à Allendale, Michigan, et l'un des contributeurs réguliers de la colonne "Feature" du journal électronique de *l'American Mathematical Society*

William Casselman est retraité du département de mathématiques de l'université de British Columbia en 2006. Editor graphique des *Notices of the American Mathematical Society*, il est l'auteur de **Mathematical Illustrations** (Cambridge University Press, 2004), et l'un des quatre contributeurs de la colonne "Feature" de l'A.M.S.

David WRIGHT est professeur de mathématiques à l'université Oklahoma - State. Avec David Mumford et Caroline Series, il est l'un des auteurs de **Indra's Pearls** (Cambridge University Press, 2002).



Penrose II. 2002.
David AUSTIN - William CASSELMAN - David WRIGHT

Vers 1977, Roger Penrose a découvert les pavages du plan qui portent aujourd'hui son nom. Ils possèdent des symétries locales d'ordre arbitraire, mais pas de symétries globales. Assemblés selon des règles locales, les pavés peuvent recouvrir entièrement le plan. On peut le prouver par

l'emploi d'un processus d'inflation/déflation permettant de passer d'un niveau d'assemblage donné à un niveau supérieur, ou au contraire de partitionner les pavés pour obtenir un niveau d'assemblage inférieur. Le rapport de dimension entre deux niveaux adjacents a pour valeur le nombre d'or : 1,618 ... Le processus d'inflation peut être observé dans la partie moirée de l'image qui assure la transition entre la partie basse à gauche et la partie supérieure à droite de cette image.



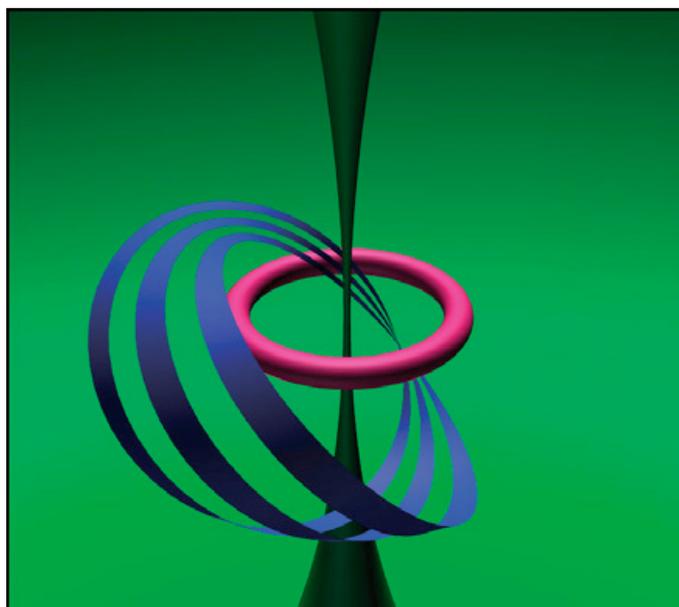
Tom BANCHOFF

Président de la Mathematical Association of American pour l'année 1999-2000. Il a travaillé avec des informaticiens depuis 1968, pour visualiser des objets et des phénomènes dans les espaces à trois et quatre dimensions. En 1978, son film «*The Hypercube: Projections and Slicing*», réalisé avec l'informaticien Charles Strauss, reçut le Prix de la Recherche Fondamentale au Festival International du Film Scientifique et Technique à Bruxelles. La même année, l'invitation à donner une conférence au Congrès International de Mathématiques d'Helsinki lui permit de projeter un des tout premiers films réalisés sur ordinateur montrant des animations géométriques, le premier en tout cas se rapportant à la géométrie de la dimension quatre.

<http://www.math.brown.edu/TFBCON2003/art/welcome.html>

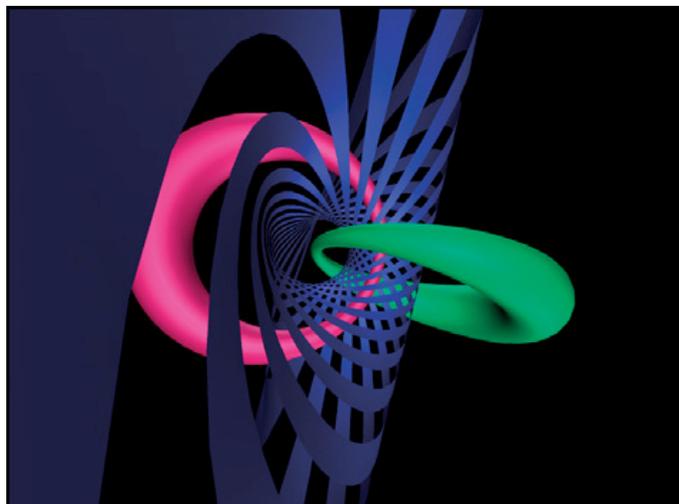
<http://www.math.union.edu/~dpvc/professional/brief.html>

Mises sous la forme présente par Davide Cervone, les images qui suivent furent créées au début des années 1980 par Huseyin Kocak, Fred Bishopp, David Laidlaw, David Margolis et Thomas Banchoff.



Hopf Links.
Tom BANCHOFF & Alii

Un tore plein peut être décomposé en lamelles fines formées de tores creux aux rayons de plus en plus petits, le stade final étant un cercle. La sphère de l'espace à quatre dimensions peut être conçue comme l'association de deux tores pleins soudés par le tore creux de liaison qu'est leur surface. On a représenté ici les projections stéréographiques dans l'espace à trois dimensions de deux tores creux, l'un vert appartenant à l'un des tores pleins, l'autre rouge appartenant à l'autre tore plein. Des tores creux intermédiaires sont représentés par des bandes bleues peintes sur ces tores.



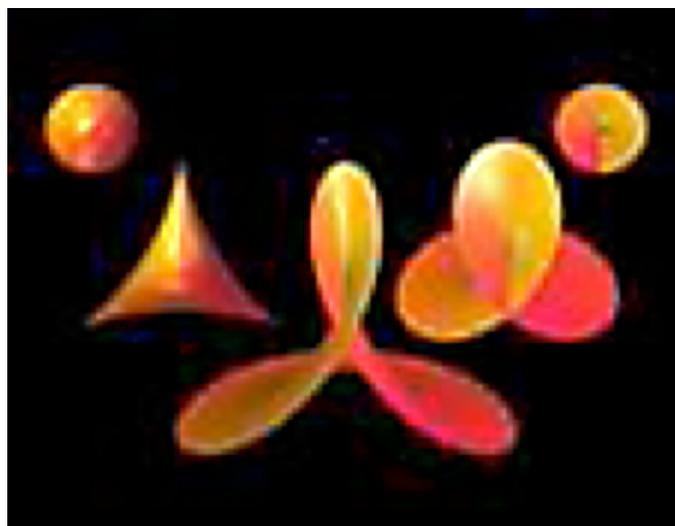
Pendulum Tori.
Tom BANCHOFF & Alii

Le nom vient du fait que ces tores peuvent être employés à la représentation du système physique connu sous le nom de double pendule : il est constitué d'un second pendule placé et se balançant à l'extrémité d'un premier pendule. Pour un rapport donné entre les longueurs des deux pendules, les différentes positions du système correspondent aux points d'un tore fixe à l'intérieur de la famille représentée ici, liée à la constitution de la sphère dans l'espace à quatre dimensions.



In and Outside the Torus.
Tom BANCHOFF & Alii

On peut fabriquer la sphère dans l'espace à quatre dimensions à partir de deux tores pleins (deux pains ayant chacun la forme d'une couronne), en les accolant par leur surface, le tore (creux). Ce tore creux de liaison est situé dans l'espace à quatre dimensions, sa forme est peu visible. On se l'imagine mieux par ses projections stéréographiques dans l'espace usuel, le centre de projection étant situé sur ce tore. Des cercles (dits de Hopf) tracés sur ce même tore sont représentés ici par des bandes colorées.



Z-Squared Necklace.
Tom BANCHOFF & Alii

Cette image montre cinq vues partielles d'une surface située dans l'espace à quatre dimensions. La surface est définie à partir de la simple équation $w = z^2$ où w et z sont des nombres de Chuquet-Cardan, également appelés nombres complexes. Les photographies de la surface ont été prises à partir de cinq points d'observation différents. On trouvera sur le site des auteurs des vues animées de la surface et une explication mathématique plus détaillée. (T.B.)



Luc BÉNARD- Richard PALAIS

Les circonstances ont forcé Luc Bénard, canadien de Montréal, à quitter l'école à la fin du secondaire. Depuis toujours intéressé par les sciences et les l'art, il a continué à étudier par lui-même, notamment la physique des plasmas et l'électronique des hautes puissances. Toute sa carrière professionnelle s'est déroulée dans le domaine de la production télévisée, principalement dans le cadre des émissions consacrées aux informations. Avec la montée en puissance des ordinateurs, Luc a commencé par employer les fractals comme matériaux de base pour ses créations visuelles, utilisant surtout les logiciels de Stephen Ferguson et David B. Sprangler Smith. Depuis quelques années, il produit des images 3D avec les logiciels Bryce et Carrara. Mais sa rencontre avec le mathématicien Richard Palais a été déterminante.

Richard Palais, professeur émérite de l'université de Brandeis, laisse son nom de mathématicien dans le domaine de l'analyse différentielle. Son intérêt dans la visualisation des objets mathématiques l'a conduit à créer le logiciel renommé 3D-XplorMath, et, autour de ce logiciel,

à rassembler une équipe internationale d'artistes et mathématiciens, le 3DXM Consortium : son objectif final de ce consortium est création d'un Musée Mathématique Virtuel.

<http://3D-XplorMath.org>

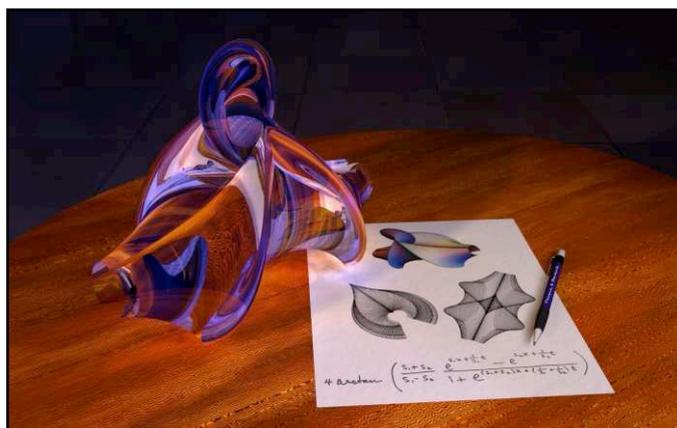
<http://virtualmathmuseum.org>

<http://virtualmathmuseum.org/mathart/Mathematical Art.html>



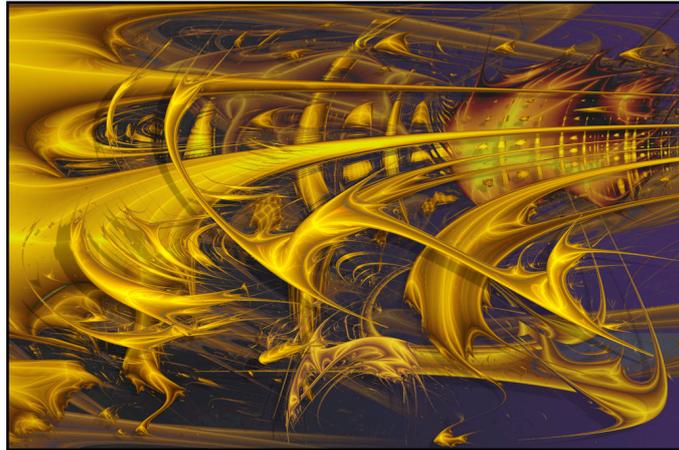
**Un mathématicien à Murano.
Luc BENARD - Richard PALAIS**

Depuis le bas, à gauche, et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, on rencontre : une bouteille de Klein, la surface minimale symétrique 4-noïd, la surface Breather, la surface de Boy, et enfin celle de Sievert-Enneper. Cette œuvre a été primée en 2006 par la National Science Foundation.



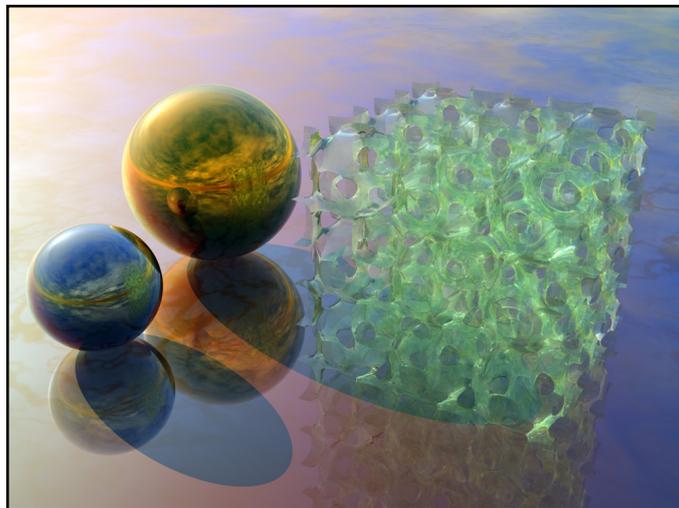
**Songe de l'étudiant.
Luc BENARD - Richard PALAIS**

Cette surface, dite de Kuen, est de géométrie hyperbolique. Elle peut être décrite par l'équation figurant au bas de la page de la composition. Cette œuvre a été primée en 2009 par la National Science Foundation.



**Cuivres et ors, symphonie concertante.
Luc BENARD - Richard PALAIS**

Superposition de plusieurs rendus de solutions d'équations de Marcus-Lyapounov - ces équations servent à étudier l'évolution de populations animales !



**Vert lumière.
Luc BENARD - Richard PALAIS**

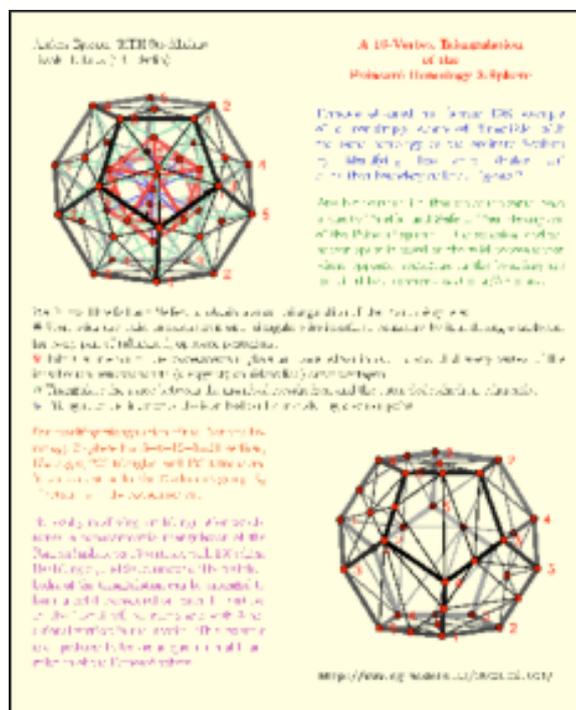
L'objet de teinte verte représenté dans cette image est une surface implicite triplement périodique, proche d'une surface minimale de Schwartz. Cet ensemble d'unités peut être visualisé comme une chambre centrale avec des tubes partant de chaque face ainsi que de chaque coin, reliant les autres chambres. Récemment son équation et d'autres semblables ont été étudiées par des spécialistes des matériaux pour modéliser la structure de certains polymères. Le modèle 3D original provient du "**The Scientific Graphics Project**" par David A. Hoffman et James T.



Anders BJÖRNER- Frank LUTZ

Anders Björner a principalement travaillé sur les aspects combinatoires présents dans les différents domaines des mathématiques. Plusieurs prix ont couronné son œuvre. Il dirige actuellement l'Institut Mittag-Leffler à Uppsala près de Stockholm.

Frank Lutz, professeur à Berlin (TU), est également un spécialiste de la combinatoire et de la visualisation en topologie.



La 3- sphère d'homologie de Poincaré. Anders BJÖRNER- Frank LUTZ

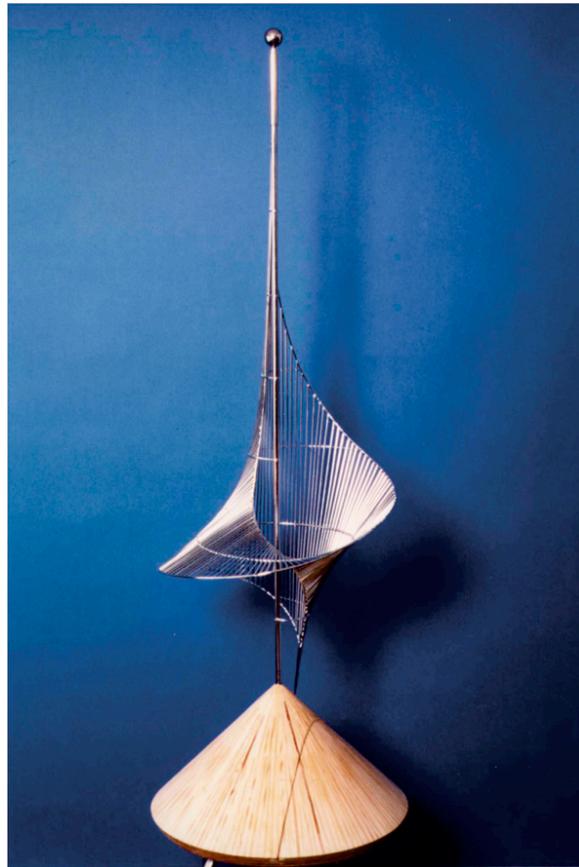
Cette œuvre n'est certes pas une œuvre d'artiste à proprement parler, mais une œuvre de mathématiciens. Elle montre divers aspects de leur travail, de la même nature que celui de l'artiste : souci de précision et richesse de construction, rôle de la symétrie dans l'expression du sentiment esthétique et de l'attrait exercé par les objets qui en sont dotés. Poincaré a pensé un moment que si la 3-sphère et un autre domaine compact de l'espace à 4 dimensions possédaient les mêmes groupes d'homologie, ledit domaine était continûment déformable en la sphère. Il a fallu déchanter, Poincaré lui-même trouvant ce contre-exemple.



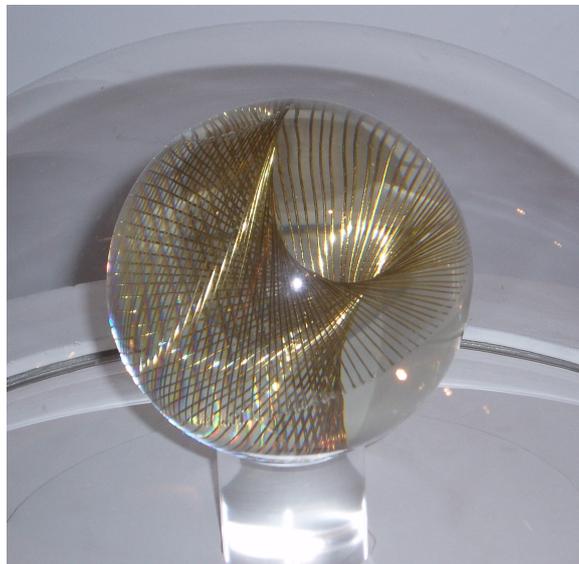
Philippe CHARBONNEAU

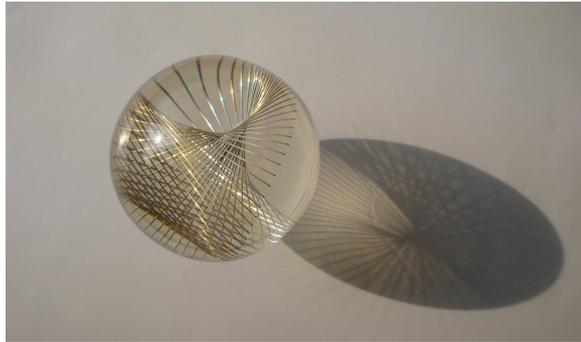
Né en 1936 en Vendée. Après une carrière professionnelle de dessinateur-projeteur en architecture, j'ai entrepris des recherches plastiques dans le domaine de l'espace et de la géométrie un peu pour prolonger et enrichir mes activités architecturales antérieures, avec d'ailleurs une ambition inavouée pour des réalisations monumentales. Mes recherches sont

principalement orientées vers les surfaces réglées du troisième degré. Au même titre que le ruban de Möbius par exemple, ces surfaces sont paradoxales. Toutes en courbures, elles ne sont cependant engendrées que par des droites. D'un principe simple, elles déterminent des formes et des volumes complexes qui déstabilisent et enrichissent notre sens de l'espace. Des notions aussi banales que faces, dessus, dessous, intérieur, extérieur, peuvent y perdre leur sens habituel.



Biconique 4. 1999.
Philippe CHARBONNEAU





Dans l'Ambre de Möbius. 2003.
Philippe CHARBONNEAU



Jean-François COLONNA

Docteur es Sciences, il est chercheur au Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique où il mène des recherches sur le Calcul Scientifique, le Génie Logiciel et la Visualisation Scientifique. L'ensemble de ses travaux débouche sur le concept d'Expérience Virtuelle, consistant à réaliser des expériences, non pas sur un système, mais sur son modèle mathématique. Les images et animations qu'il a créées, plus de 3000 à ce jour, couvrent de nombreux domaines tant de la physique que des mathématiques.

<http://www.lactamme.polytechnique.fr/>

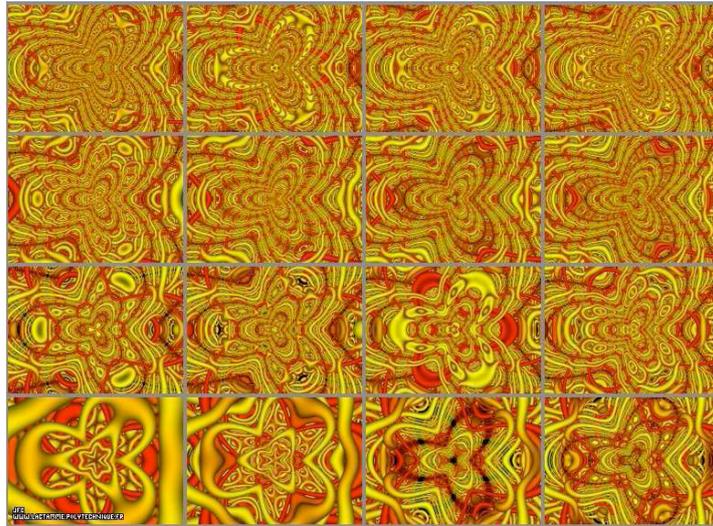


Monument Valley au coucher de soleil. 1997.
Jean-François COLONNA

<http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/descripteurs/MonumentValley.01.Fra.html>

Dans cette image, deux types d'objets fractals se côtoient : les nuages et les montagnes. Pour définir ces dernières, en supposant l'absence de surplombs, il suffit de donner l'altitude Z en chaque point $\{X, Y\}$ d'un plan de référence, par l'intermédiaire d'une fonction $Z(X, Y)$ qui traduit mathématiquement la propriété d'autosimilarité. Utilisée directement, elle donnerait naissance à un relief de type alpin. Mais il est possible de transformer les valeurs qu'elle produit

: c'est le cas ici où seules les basses et les hautes altitudes ont été conservées afin de simuler les reliefs caractéristiques de Monument Valley (Utah, USA), les couleurs choisies étant naturelles et l'éclairage correspondant à celui d'un coucher de soleil.

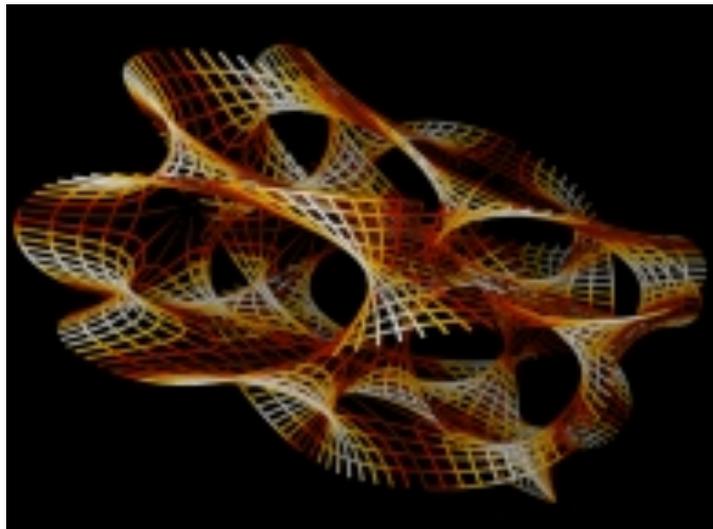


Animation d'entrelacs. 2009.

Jean-François COLONNA

<http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/images/STRU.d4.16.D/display.htm>

Les entrelacs peuvent être facilement décrits mathématiquement en se donnant des "motifs décoratifs" élémentaires de préférence périodiques horizontalement et verticalement. Ces motifs sont ensuite transformés à l'aide de fonctions éventuellement récursives et paramétrées, ce qui permet, par exemple, en faisant varier le ou les paramètres, de les animer.



Représentation tridimensionnelle d'une variété quadridimensionnelle de Calabi-Yau. 2002.

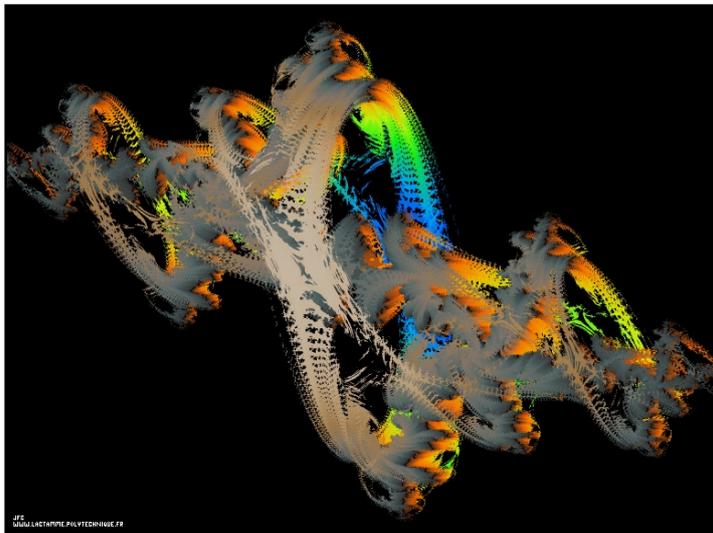
Jean-François COLONNA

Une importante théorie moderne des particules élémentaires représente celles-ci par des fils, par des cordes. Cette théorie fait appel à des objets géométriques situés dans des espaces de grande dimension. Les « variétés de Calabi-Yau » sont de tels objets. On voit ici une vue d'artiste de la section de l'une de ces variétés dans l'espace usuel à trois dimensions.



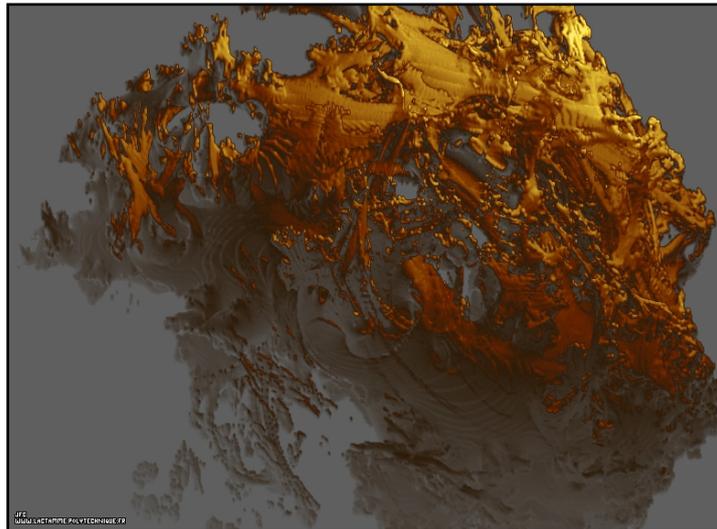
La danseuse d'Yr. 2006.
Jean-François COLONNA

Un ensemble de Julia dans le corps des quaternions calculé pour $c = (0, 1, 0, 0)$



La nouvelle danseuse d'Yr. 2009.
Jean-François COLONNA

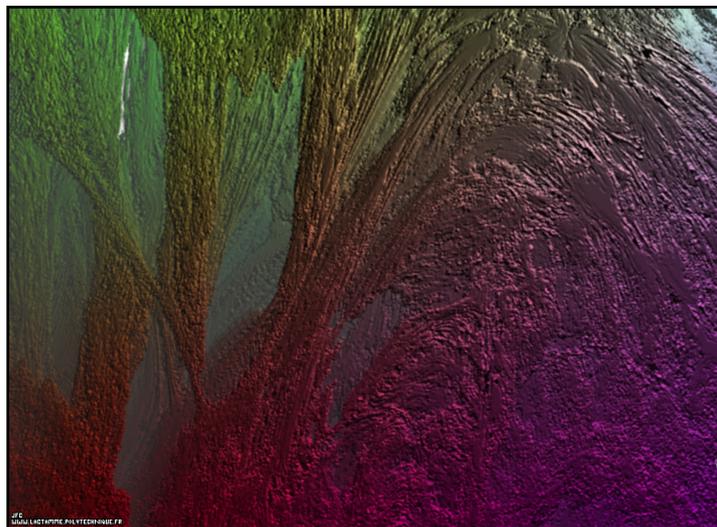
L'ensemble de Julia dans le corps des quaternions calculé pour $A = (0.5815147625160462, 0.6358885017421603, 0, 0)$



**Hommage à Hernandez. 2010.
Jean-François COLONNA**

Vue artistique d'un ensemble de Julia dans l'ensemble des pseudo-quaternions (comme un Mandel Bulb : un Julia Bulb) calculé pour $A = (-0.5815147625160462, 0.6358885017421603, 0, 0)$

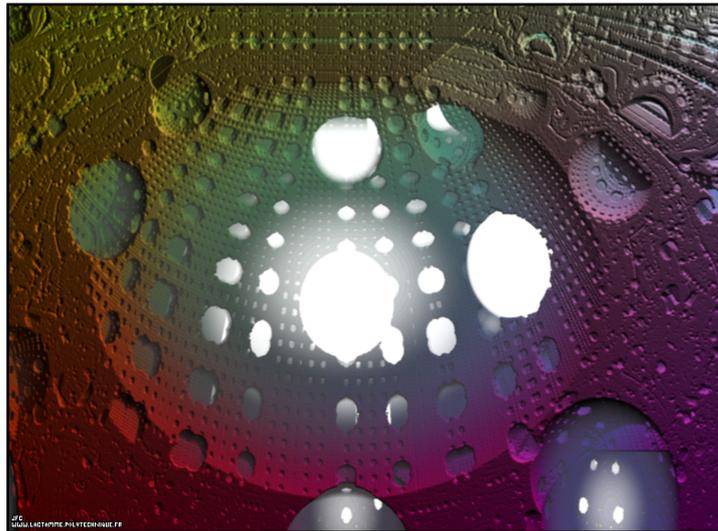
<http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/images/JULI.v2.2.D/display.html>



**Vingt mille lieues sous les mers. 2010.
Jean-François COLONNA**

Agrandissement d'un ensemble de Mandelbrot dans l'ensemble des pseudo-quaternions (un Mandelbulb)

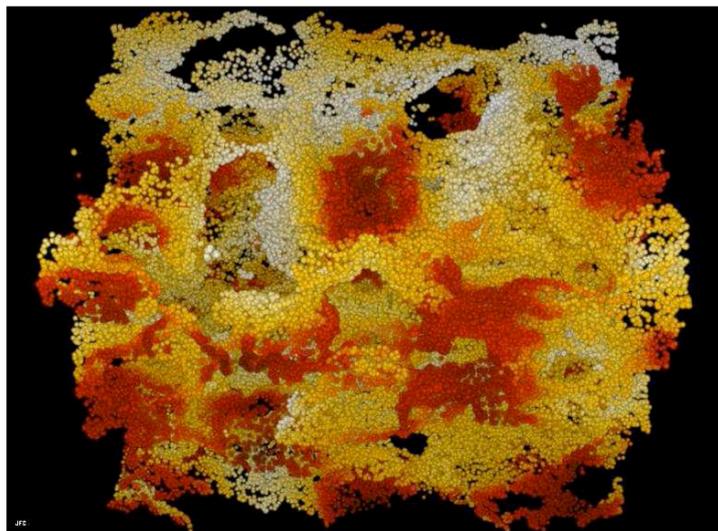
<http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/images/MANE.11.2.D/display.html>



Sous la coupole. 2010.
Jean-François COLONNA

Un détail d'un 'MandelBox' brumeux

<http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/images/MANB.71.2.D/display.html>



Synthèse fractale d'une structure spongieuse tridimensionnelle. 1998.
Jean-François COLONNA

<http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/images/FRA3.D3.0029.D/display.html>

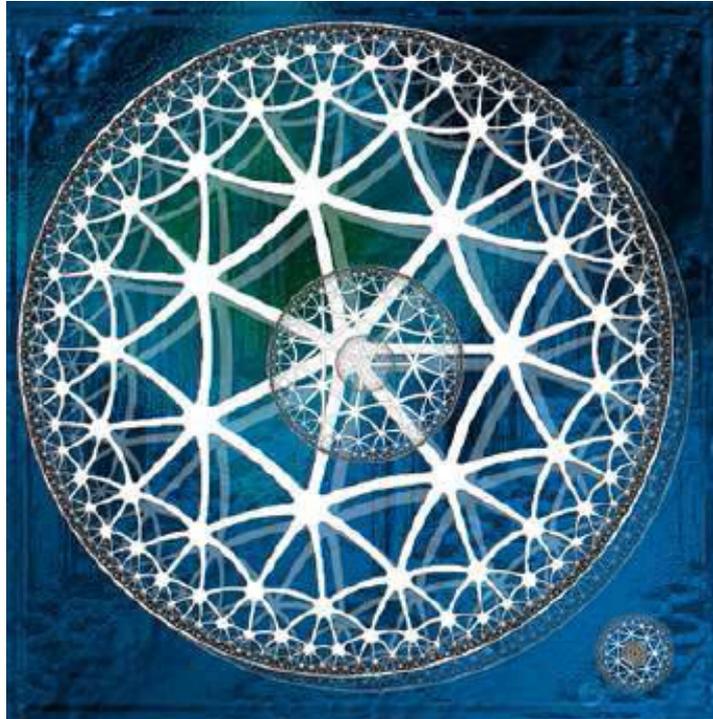


Jean CONSTANT

De formation littéraire et artistique classique, Jean Constant vit aux États Unis et partage son temps entre l'enseignement des techniques numériques et graphiques sur ordinateur et ses études personnelles sur l'esthétique des sciences exactes et mathématiques. Ses recherches sur la géométrie Wasan et les structures de visualisation des fonctions itératives ont reçu le soutien de

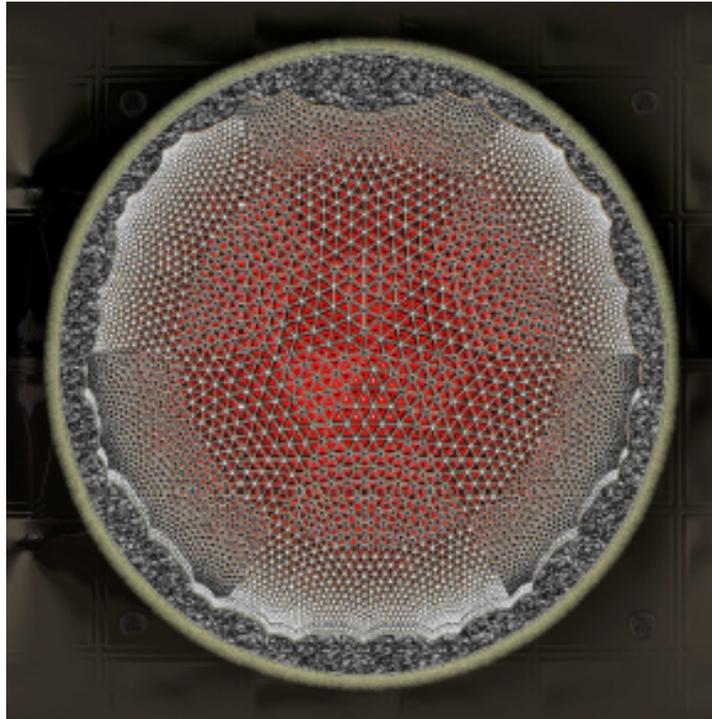
la National Science Foundation. Participant actif de l'association ARPAM depuis 2005, il maintient le site bilingue de l'association et, en collaboration avec Richard Denner et Andreas Matt, supervise le site et les moteurs de communication électronique de l'European Society for Mathematics and Art (ESMA). Ses travaux personnels de composition numérique, de recherche sur toile et sur papier, sont publiés régulièrement sur le site:

<http://hermay.org/jconstant>



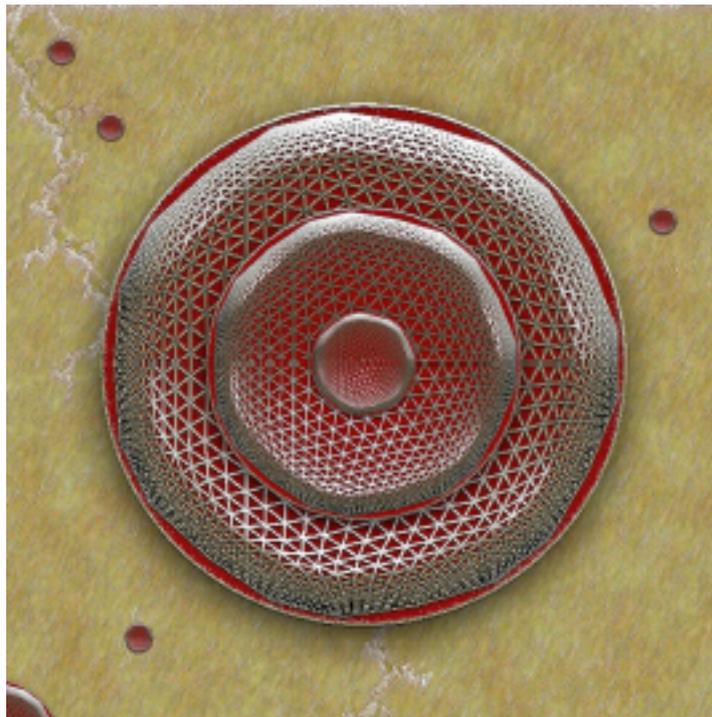
**Zillij style tiling - (Early medieval Morocco). 2007.
Jean CONSTANT**

Pavage de Poincaré à 7 triangles avec épaissement des arêtes



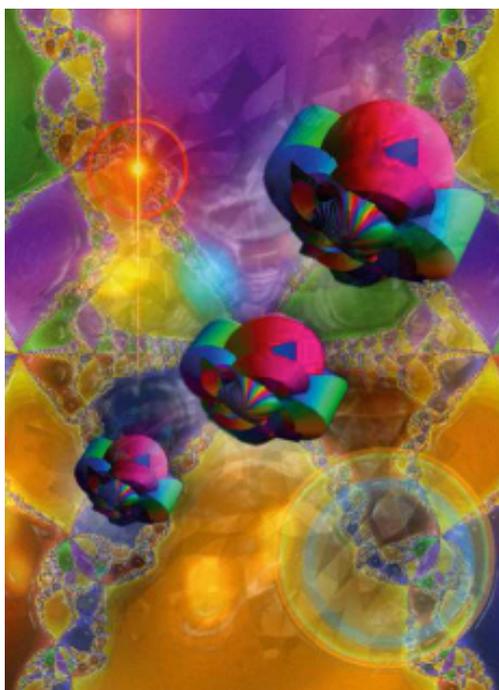
Nuclear threat. 2007.
Jean CONSTANT

Variation d'un pavage hyperbolique; 7 triangles se rencontrant en chaque sommet



Industrial age. 2007.
Jean CONSTANT

Dôme hyperbolique subdivisé par des géodésiques en projection de Klein



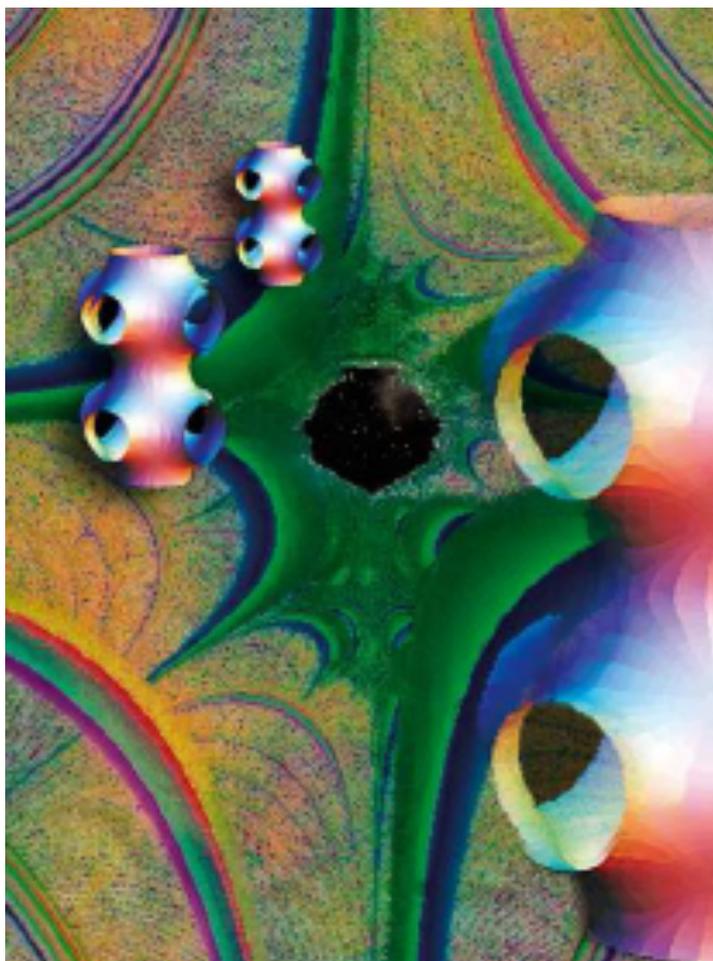
Ascending stairways. 2004.
Jean CONSTANT

Définition d'une surface polynomiale sur un fond fractal. Les variations sur les parties créées avec l'algorithme du peintre ont été mise en relief par des aberrations optiques pour renforcer l'effet d'escalier en colimaçon, une proposition géométrique très intéressante.



Couples. 2004.
Jean CONSTANT

La surface minimale d'Henneberg est une surface non orientable définie sur le disque unité. Elle est une immersion du plan projectif réel qui a été percée en plusieurs points (une fois à l'origine et quatre fois en chacune des racines de la métrique). Par suite, ce n'est pas une surface complète.



L'élément perdu. 2004.

Jean CONSTANT

Une surface de la famille des surfaces minimales de Schwarz DP (D pour losange, P pour triplement périodique), et plongée dans la famille à laquelle elle est associée, une troisième surface, la surface gyroïde (voir dans ce catalogue la gravure de Patrice Jeener). Une perspective ambiguë centrée sur un trou noir d'où nous viendrait la connaissance.



Parabolo. 2004.
Jean CONSTANT

En mathématiques, un paraboloïde est une quadrique, un type de surface visible dans l'espace usuel. Il existe deux sortes de paraboloïde : l'elliptique et l'hyperbolique. Le paraboloïde elliptique a la forme d'une coupe. Le paraboloïde hyperbolique a la forme d'une selle ; il est une surface réglée. Une mythologie renversée célébrant l'esprit d'alchimistes oubliés qui auraient pu inspirer l'esthétique moderne.



Aphroditis. 2004.
Jean CONSTANT

Variation sur la bande de Moebius et la bouteille de Klein. *Aphroditis* est une boucle sans fin dans l'imagination de l'homme. Un concept renforcé par les manipulations fractales. Ce mystère participe à notre subconscient, quelles que soient les dimensions ou la structure du système en place.



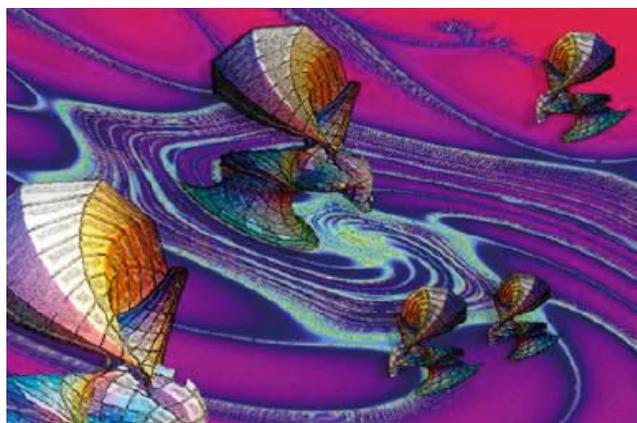
Évasion de B. 2004.
Jean CONSTANT

Pseudo sphères de Beltrami émergeant de l'inconscient mathématique.



Chagall revisité. 2004.
Jean CONSTANT

Variation sur les propriétés de définition d'une fonction analytique complexe. La combinaison de manipulations multiples d'un modèle elliptique dans une grille de couleurs prédéterminées conduit à un effet "A la manière de" alors que les éléments flottent en surface et se rattachent les uns aux autres pour rendre la composition homogène. On reconnaît en particulier dans les dessins du chapeau et du visage la présence d'une surface pseudo sphérique.



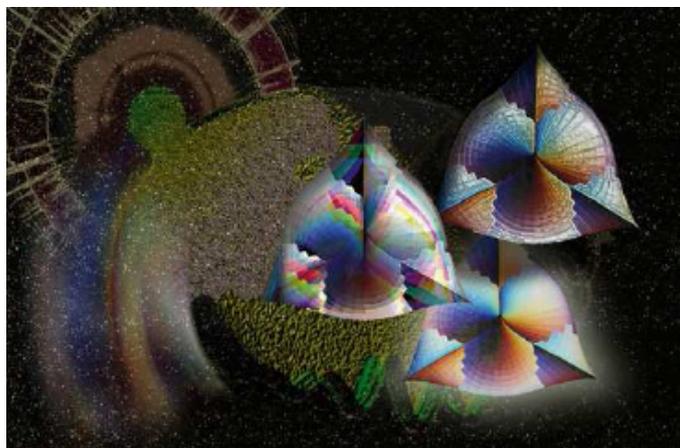
Cyclone doux. 2004.
Jean CONSTANT

Exemple de solitons qui se fondent en un motif fractal pour créer une dynamique de mouvement dans l'espace à la manière des solutions d'une équation de Sine-Gordon.



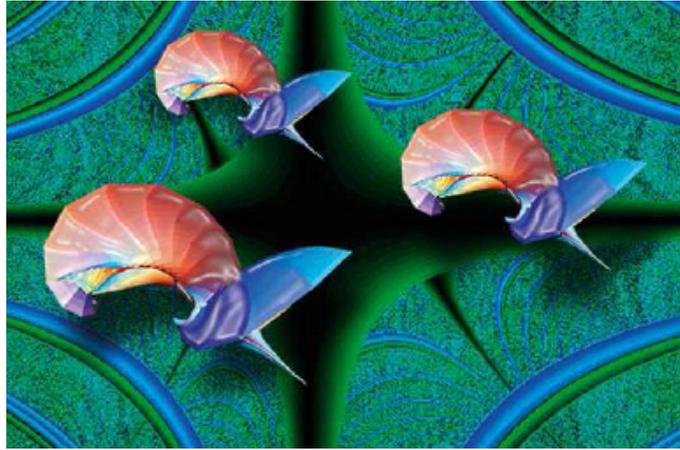
Trois solitons: rencontre d'idées. 2004.
Jean CONSTANT

J'ai toujours été intrigué par le "Déjeuner sur l'herbe" de Manet. Quel type de nourriture pourrait satisfaire les exigences de cet auguste assemblé d'esthètes et de chercheurs d'absolu, si les participants étaient d'éminents scientifiques au lieu d'artistes hédonistes. Je soumettrai qu'un plateau composé de beignets de la maison Clifford-Hopf, de tores plats à la (sauce) Pinkall, et de pâtisseries elliptiques pourraient satisfaire les exigences de cette réunion distinguée.



L'effet de Chaco. 2004.
Jean CONSTANT

La surface paramétrique du reniflard (*Parametric Breather surface*). Trois surfaces pseudo sphériques émergent de la légende d'une civilisation perdue pour réaffirmer une dynamique universelle.



Abeille joviennes. 2004.
Jean CONSTANT

Une «surface à n Solitons» (n vaut trois dans le tableau) est une surface de courbure gaussienne négative, et donc hyperbolique. Une projection intéressante dans le monde physique en termes de similarités avec des éléments connus.



Txoria. 2008.
Jean CONSTANT

Composition faite à partir des surfaces de Boy-Bryant-Kusner et de Boy-Apéry.

Txoria par Joxean Artze (traduit du basque)

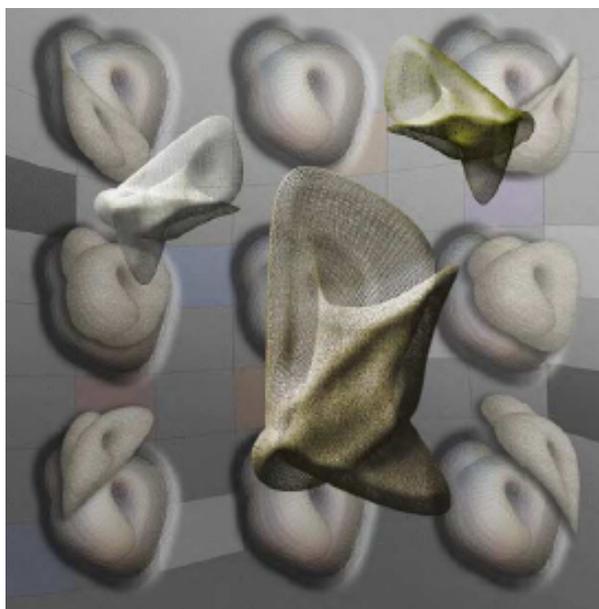
*Txoria Txori
Hegoak ebaki banizkio,
nerea izanen zen, ez zuen aldeginen;
baina, honela
ez zen gehiago txoria izanen,
eta nik...
txoria nuen maite*

*L'Oiseau Oiseau
Si je lui avais coupé les ailes,
Il aurait été à moi,
Il ne serait pas parti
Mais ainsi, il n'aurait plus été un oiseau
Et moi ...
C'est l'oiseau que j'aimais.*



**L'enfant et l'albatros. 2008.
Jean CONSTANT**

Composition faite à partir des surfaces de Boy-Bryant-Kusner et de Boy-Apéry.



**Multiple de Z. 2008.
Jean CONSTANT**

Composition faite à partir des surfaces de Boy-Bryant-Kusner et de Boy-Apéry.



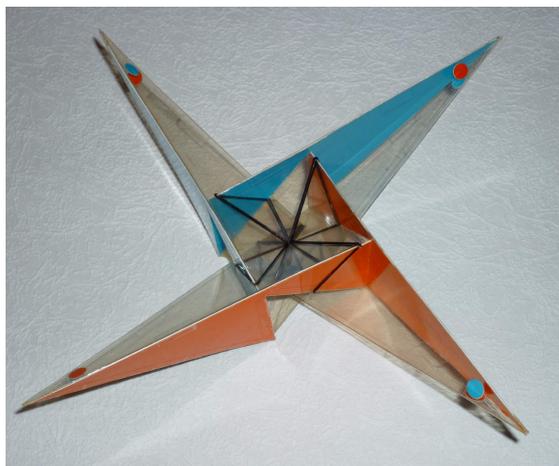
Richard DENNER

Enseignant en collège, j'ai rencontré Bernard Morin lors de ma préparation au Capes. Par la suite, il m'a guidé dans l'approche du retournement de la sphère dans le domaine polyédrique et, en 1989, nous avons mené à leur terme les calculs du retournement du cuboctaèdre qu'il avait alors conçu. Ces modèles furent exposés lors du colloque Arts et Mathématiques de Maubeuge (sept. 2000). Depuis, grâce au logiciel JavaView, j'ai programmé des applets qui permettent d'animer ces modèles à l'écran. Ce travail de recherche trouve un aboutissement avec la mise au point de plusieurs retournements n'utilisant chacun que 5 modèles.



**Surface polyédrique de Boy à 9 sommets.
Richard DENNER**

La surface de Boy à 9 sommets présentée ici, issue des travaux d'Ulrich Brehm et adaptée par Bernard Morin à l'étude des retournements polyédriques de la sphère, est à l'origine de ce travail. La réunion des trois pentagones concaves rouges forme un ruban de Möbius sur le bord duquel se raccorde un assemblage de 7 triangles homéomorphes à un disque. La surface obtenue n'a qu'une seule face ; elle se traverse elle-même donnant naissance à une ligne de points doubles en forme d'hélice tripale et à un point triple.



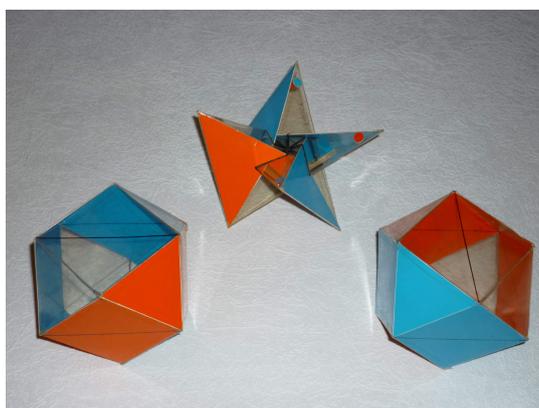
**Modèle central ouvert du retournement polyédrique de la sphère.
Richard DENNER**

Contrairement à la surface de Boy, le modèle suivant obtenu à partir d'un enchaînement de 4 pentagones concaves, placés en position verticale, est une surface ayant 2 faces comme une sphère. Le modèle s'obtient en complétant la construction avec 4 facettes triangulaires dorsales ayant en commun un point quadruple et par 4 facettes triangulaires ventrales qui referment le modèle par en dessous. La ligne d'auto-intersection prend la forme d'une hélice à 4 pales sur laquelle se greffent deux boucles qui s'entrecroisent. Ce modèle constitue une étape centrale d'un retournement polyédrique de la sphère. Il est dit *ouvert* car on peut accéder au point quadruple en passant par les 4 cavités latérales créées par la concavité des pentagones.



**Modèle central fermé du retournement polyédrique de la sphère.
Richard DENNER**

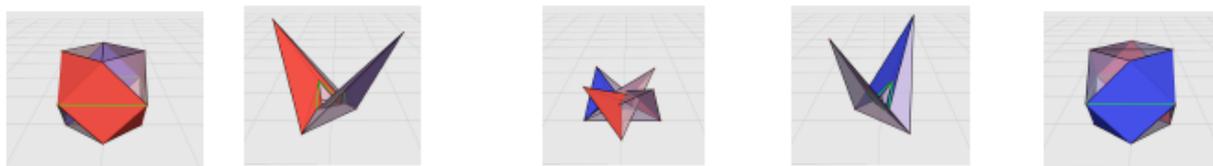
Lorsque l'on incline les 4 faces pentagonales vers l'axe de symétrie vertical du modèle précédent jusqu'à ce que les 4 plans dorsaux passent par le sommet des pentagones qui créent la concavité, ces accès se bouchent, et le modèle est alors appelé *modèle central fermé*. Voici le modèle qui fut retenu pour s'engager dans la recherche d'un retournement polyédrique de la sphère. Plus ramassé sur lui-même que le modèle central ouvert, il concentre en un petit espace les lieux où vont se produire les principales modifications. C'est en déformant de proche en proche ce modèle que Bernard Morin aboutit, en six étapes, à un modèle ne présentant plus aucune ligne d'auto-intersection et qui par des déformations supplémentaires peut-être transformé en un cuboctaèdre. Ce retournement, par mouvements élémentaires, est composé de 45 modèles. Il a été possible d'en faire une animation sur ordinateur à l'aide du logiciel JavaView.



**Étapes initiale, centrale et finale du retournement polyédrique de la sphère.
Richard DENNER**

La sphère est ici représentée par un cuboctaèdre dont on a rajouté une arête supplémentaire dans chacune des 6 faces carrées. La déformation qui permet de retourner la sphère sans déchirure peut être menée de sorte que la surface se traverse elle-même et conduise à une étape centrale caractérisée par la présence d'un point quadruple. L'objectif poursuivi est la simplification du retournement avec 45 modèles en se réduisant à faire des interpolations linéaires entre 5 modèles seulement. Il faut alors imaginer des modèles intermédiaires présentant des étirements en forme de cornes, appelés *bicornes* pour rendre possible le retournement.

Les 5 images suivantes illustrent ce retournement:



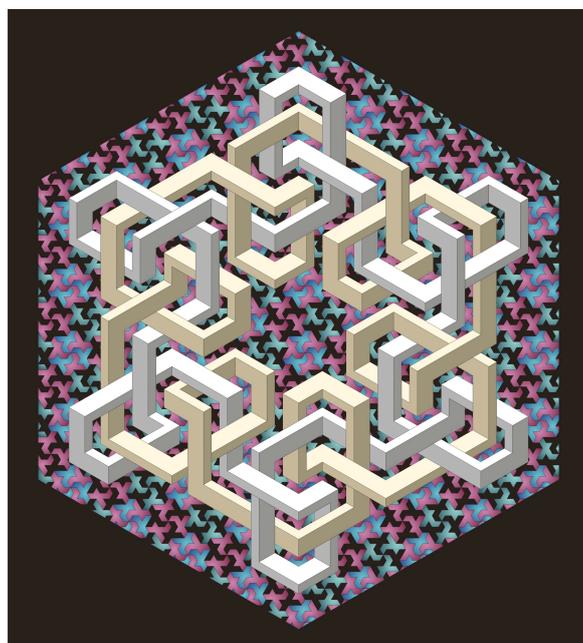
Retournement du cuboctaèdre en 4 interpolations linéaires.

Richard DENNER



Tamás FARKAS

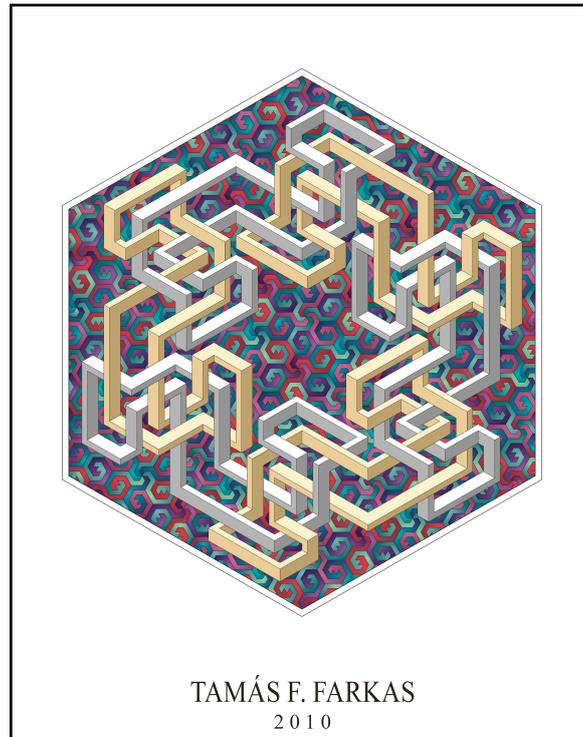
Né en 1951 à Budapest, cet artiste devient en 1980 diplômé de l'université MOMA - Moholy-Nagy Art University, où lui-même a plus tard enseigné. Il enseigne maintenant à l'Université St. Istvan, à l'école d'architecture M. Ybl. Il s'est engagé dans les recherches géométriques dès 1972. A participé à 80 expositions collectives et 30 expositions individuelles à travers le monde, et présenté ses œuvres à l'occasion d'environ 25 conférences annuelles.



Dimensio Geo. 669. 2009.

Tamas FARKAS

B-30-76



**Dimensio Geo 100. 2008.
Tamas FARKAS**

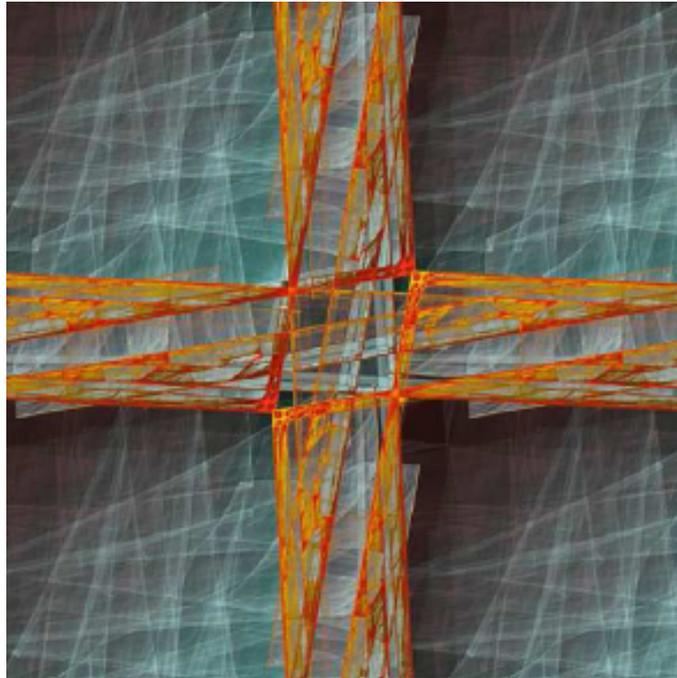


Mikael FIELD

Michael Field est professeur de mathématiques à l'université de Houston depuis 1992. Il a aussi enseigné à l'université de Sydney, Australie (1976-1992), et de Warwick, UK (1970-1976).

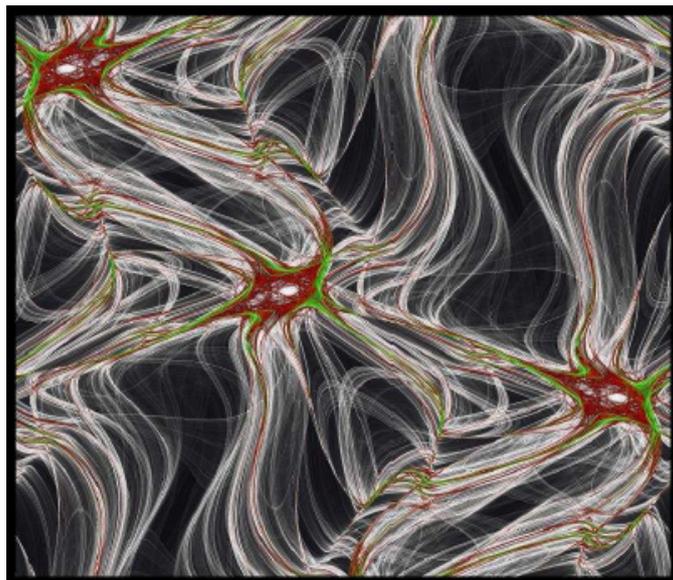
Ses recherches mathématiques sont concentrées sur le domaine des propriétés statistiques des systèmes dynamiques et de phénomènes de symétrie et plus récemment sur les théories structurelles et dynamiques des réseaux virtuels. Il a écrit 9 volumes ainsi que de nombreux papiers et monographies sur ce sujet. Il a développé un programme pour la réalisation de systèmes d'attracteurs de symétrie chaotiques en 1989 à Sydney et publie en 1992 « Symétrie et chaos » en collaboration avec Marin Golubitsy. Cet ouvrage comprend de nombreuses illustrations des théories qui y sont discutées. Une deuxième édition a été publiée récemment par SIAM. Ses visualisations graphiques ont été exposées en Europe, USA et Asie.

<http://nothung.math.uh.edu/~mike/>



Enduring Illusions. 2004.
Mikael FIELD

Cette image représente un petit fragment d'un tableau bicolore, spécialement créé pour la première exposition de l'ARPAM, tenue à l'Institut Henri Poincaré en 2002. De même que dans de nombreux autres tableaux bicolores, sont présentes des illusions optiques et des ambiguïtés visuelles.



Neural Net. 2002.
Mikael FIELD

76 x 61cm Durst Lambda 130 print on glossy Kodak photographic paper.

En même temps que son compagnon *EndGame*, *NeuralNet* a été montré pour la première fois dans la Galerie d'Art du Congrès SIGGRAPH 2003.



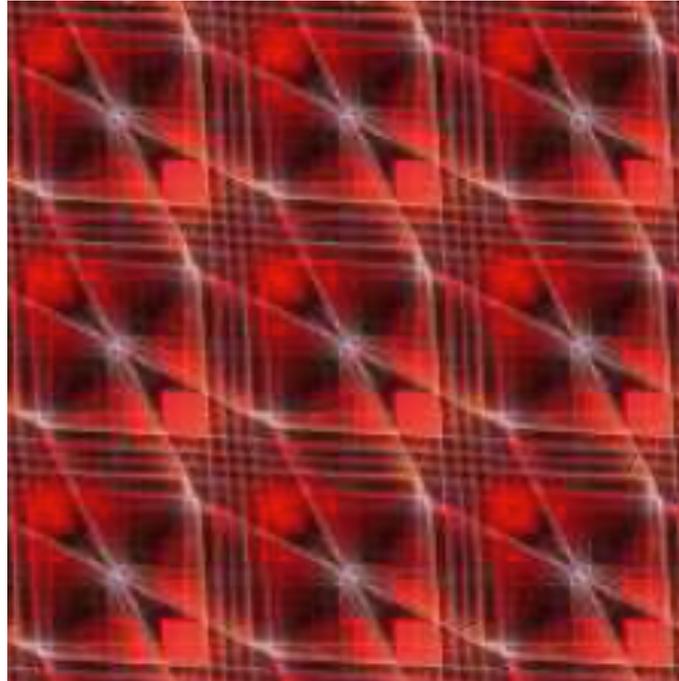
EndGame. 2002.
Mikael FIELD

EndGame a été montré pour la première fois au Congrès SIGGRAPH 2003. Il fut ensuite retenu pour figurer dans le ACM 2003-2004 travelling Art Show.



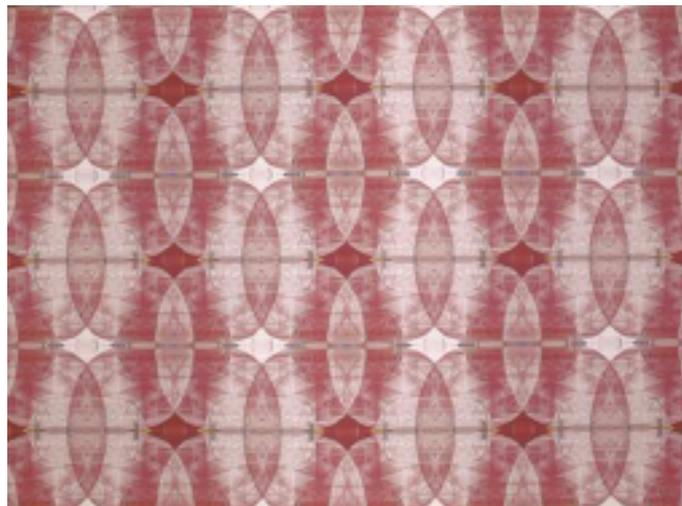
Armies of the Night. 2000.
Mikael FIELD

Armies of the Night présente un motif répétitif bicolore. La moitié des symétries du motif préserve les couleurs, l'autre moitié les échange. Cette œuvre fut montrée pour la première fois au 8th New York Digital Salon, 2000.

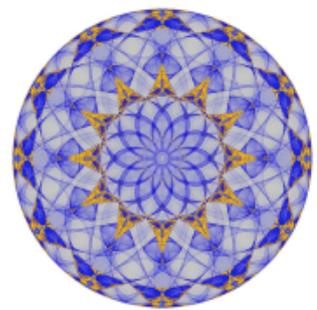
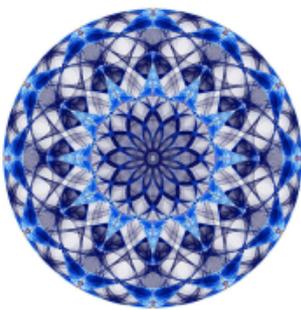
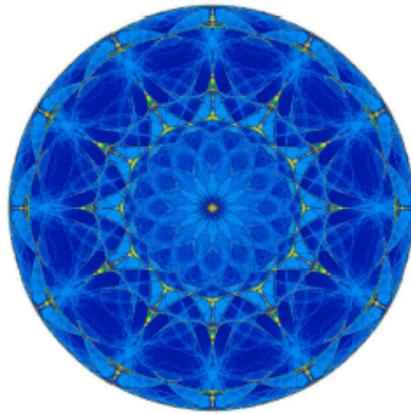
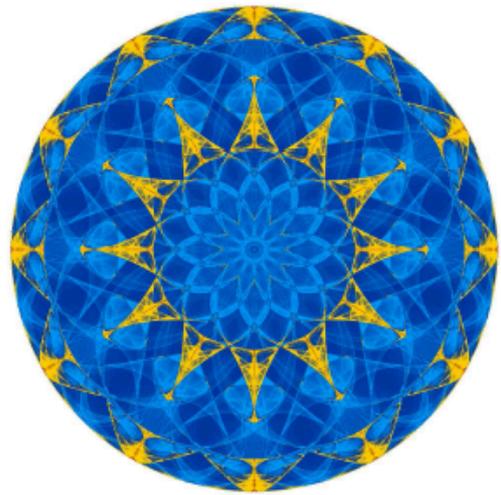
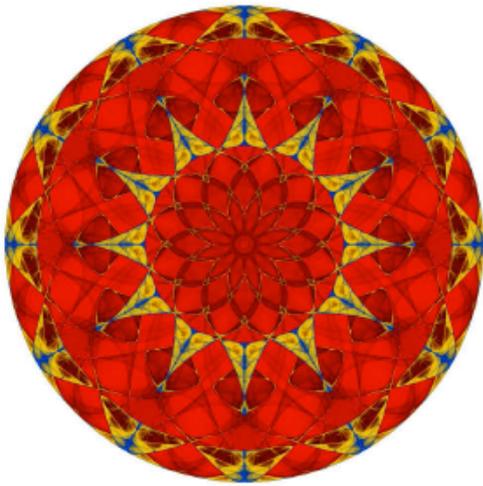


FireQuilt. 2003.
Mikael FIELD

FireQuilt présente un motif répétitif qui possède une symétrie bicolore: les symétries du motif préservent ou échangent les couleurs. Pour réaliser ce dessin, il a fallu relever plusieurs défis à la fois d'ordre mathématique et artistique. Le résultat final est très dépendant de l'algorithme employé pour créer à la fois le dessin et le coloriage.



SandStone Quilt. 2001
Mike FIELD

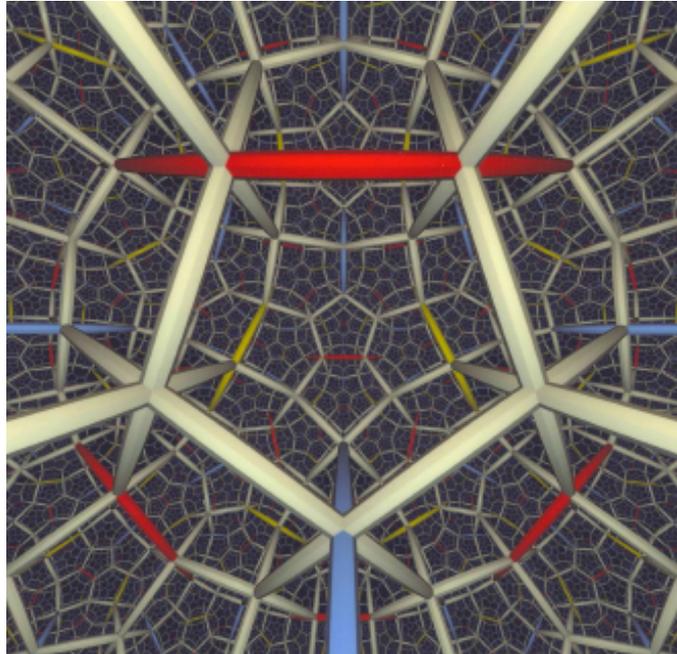


Logomachie.
Mike FIELD
Sketches pour le logo de l'ESMA



Charles GUNN

Diplômé de l'Université de Caroline du Nord, il a été employé par les firmes Tektronix, Lucasfilm et Pixar, puis a travaillé au Geometry Center de l'université du Minnesota pendant cinq ans. Depuis 2003, il poursuit ses activités dans le groupe de travail sur la Visualisation Mathématique à l'Université Technique de Berlin. Outre le développement de logiciels à fins de visualisation mathématique et d'animation, son principal centre d'intérêt scientifique se rapporte aux géométries projective et non-euclidiennes.



Espace hyperbolique.
Charles GUNN

Vue intérieure d'une portion de l'espace hyperbolique de dimension 3, pavé par des dodécaèdres réguliers. (Voir également le tableau de John Sullivan, 119 Bubbles). Cet espace, dit hyperbolique, peut être vu comme une déformation particulière de notre espace usuel, dont la courbure est nulle. Cette déformation courbe l'espace usuel de la même manière dans deux directions, autant mais d'une façon opposée dans la troisième direction, de sorte que la courbure de l'espace usuel ainsi déformé vaut -1.



George HART

George W. Hart a le statut de Research Professor au Département "Computer Science" à l'université de Stony Brook. Il est également Chief Content Officer of the Museum of Mathematics. Son domaine premier de recherches est l'application des mathématiques et de l'algorithmique à la sculpture. Ses œuvres ont été exposées en de nombreux endroits à travers le monde, parmi lesquels MIT, Princeton, et l'Université de Californie à Berkeley.

<http://momath.org>

<http://georgehart.com>



**This End Up.
George HART**

This End Up a été assemblé à partir de 20 composants identiques. Chacun a été découpé au laser, puis biseauté sur 12 faces. Ces pièces sont liées 4 par 4 et il y a 30 de ces groupements. Les 4 pièces d'un groupement se rencontrent en un point situé sur la périphérie de la sculpture selon des faces biseautées et collées entre elles. À l'intérieur, les pièces se croisent de manière complexe et sans contact. La sculpture évoque l'intérieur d'un icosidodécaèdre. Les 20 plans des composants sont les extensions des faces planes d'un icosaèdre, conçu comme composé uniforme de 5 octaèdres. Cette forme est ainsi associée à un sous-ensemble d'un icosaèdre étoilé



**Deep Sea Tango.
George HART**

Deep Sea Tango a été assemblé à partir de 12 composants identiques, chacun ayant la forme d'une étoile de mer à 10 bras. On peut voir dans cet arrangement une des figures d'un ballet aquatique ; les bras dansent les uns à travers les autres mais ne se touchent qu'en leurs extrémités. Chaque pièce a été découpée au laser, puis biseautée en ses 10 extrémités pour pouvoir obtenir les angles diédraux qu'il convient. Deux bras se rencontrent en chacun des 60

points situés sur le bord de la sculpture où les faces biseautées sont accolées. Les 12 plans des composants sont les faces planes d'un dodécaèdre, étendues pour se rencontrer comme dans le grand dodécaèdre - un arrangement de 12 pentagones qui s'auto-intersectent, décrit en 1809 par le mathématicien Louis Poinsot. Ici, la forme en étoile de mer associée à chaque pentagone, est agencée pour ne rencontrer aucune de ses copies, excepté en leurs extrémités.

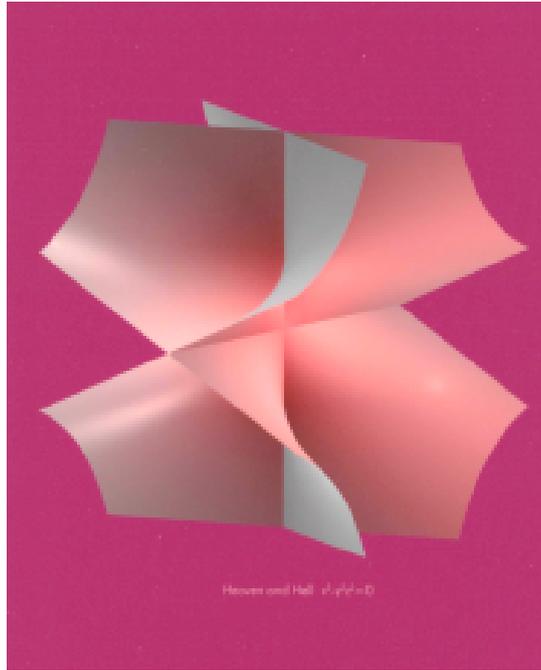


Echinodermania. 2007.
George HART
Nylon, dyed.



Herwig HAUSER

Enseignant la géométrie algébrique et la théorie des singularités à l'Université de Vienne, il s'est également adonné, avec le groupe qui l'entoure, à la popularisation et à la visualisation des objets mathématiques pour un large public. Son film *Zero Set* a notamment été projeté au Congrès International de Mathématiques tenu à Madrid, 2006.



**Le Paradis et l'Enfer.
Herwig HAUSER**

La couleur rouge est naturellement celle de l'enfer. L'enfer semble ici avoir la plus grande part. Illusion, comme le montrent les nombreuses symétries de la surface et de son équation fort simple. Les yeux fermés, posant le doigt sur une des feuilles de la surface : rouge ou bleue ?



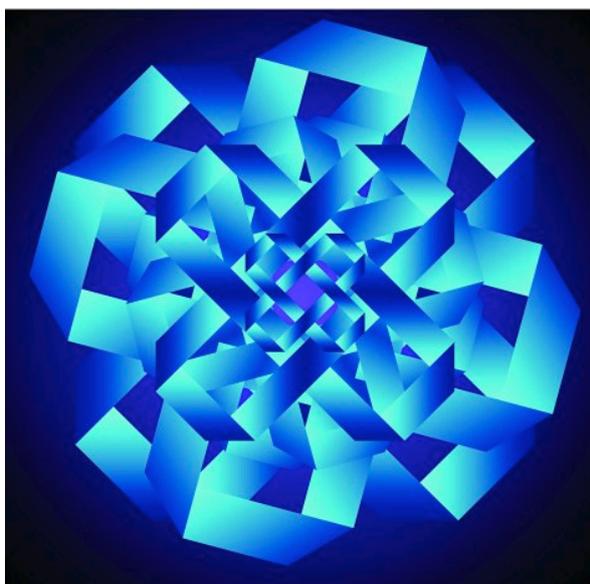
**Vis-à-Vis.
Herwig HAUSER**

A la singularité pointue de Monsieur, à gauche, répond la singularité dodue de Madame, à droite. Cette forme est très sensible aux modifications qui peuvent affecter les coefficients des variables.

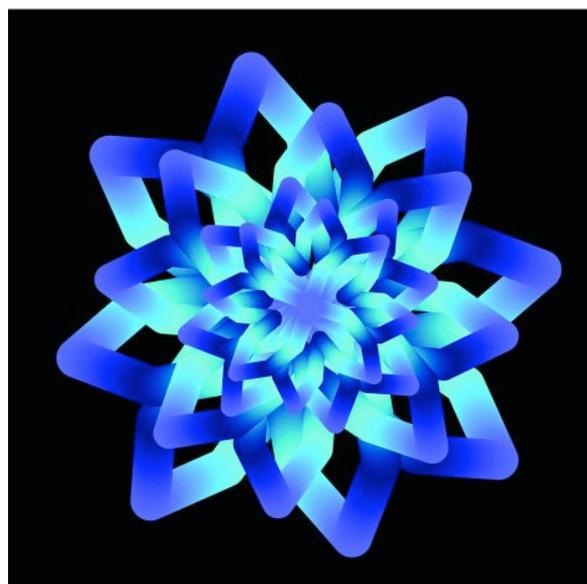


Slavik JABLAN

Slavik Jablan soutiens sa thèse de doctorat auprès de l'Université de Belgrade en 1984, et obtint une Bourse Fulbright pour les années 2003/4. Ses centres d'intérêt concernent principalement la théorie des nœuds et tout ce qui touche à la symétrie, tant sur le plan mathématique qu'artistique. Membre très actif au sein de l'International Society for the Interdisciplinary Studies of Symmetry Il est également éditeur du journal électronique "Visual Mathematics" <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/>



Neon Flower.



Blue Flower.

Slavik JABLAN

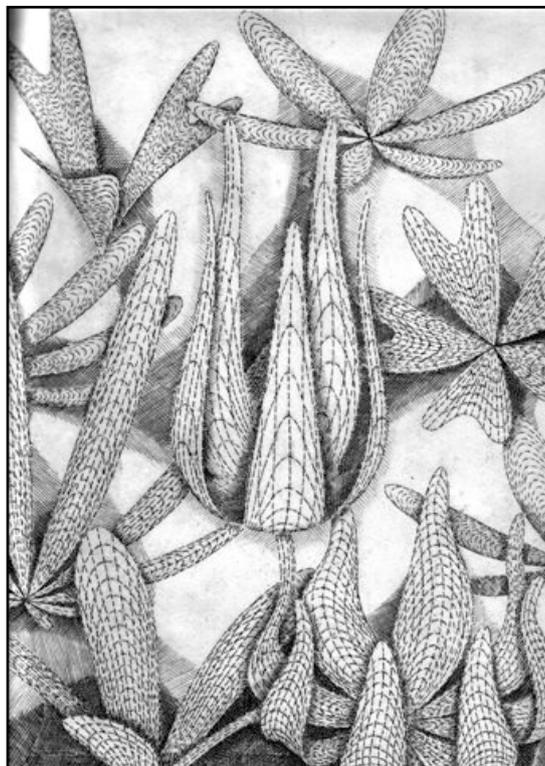
Ces deux œuvres, caractérisées par la présence de symétries et un phénomène de croissance, appartiennent à une série créée à l'aide de Corel Draw durant les années 2003-2008.



Patrice JEENER

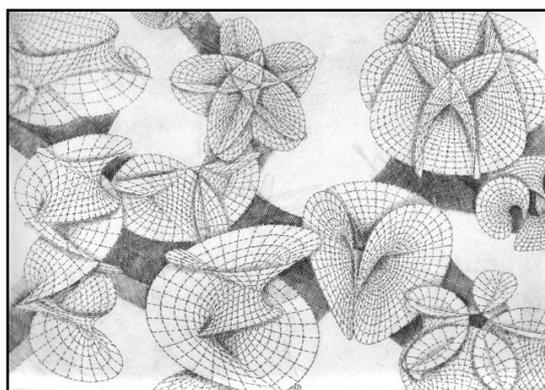
Entre en 1963 à l'École des Beaux Arts, dans l'atelier de gravure au burin. Boursier à Venise sur la recommandation de son professeur, Flocon. Il est aujourd'hui le seul artiste du domaine scientifique à maîtriser et à utiliser ce mode d'expression, la gravure. Déjà influencé par les œuvres de Escher et le traité de Flocon sur la perspective curviligne, il découvre au Palais de la Découverte et à l'Institut Henri Poincaré des modèles de fonctions mathématiques en plâtre, et

décide de s'en inspirer. Tout en étudiant les mathématiques en autodidacte, il s'emploie à représenter en gravures, de manière exacte, les nombreux objets remarquables rencontrés par les mathématiciens. Ses domaines de prédilection sont les polyèdres, les objets topologiques liés au retournement de la sphère, les surfaces minimales. Mieux que bien des universitaires, il aura fait lui-même œuvre de mathématicien pur, découvrant de nouvelles surfaces minimales et généralisant des objets classiques, tels que, par exemple, la bouteille de Klein. Il réside à La Motte Chalancon, charmant village de la Drôme Provençale, entre Vercors et Baronnies



Floraison. 2009.
Patrice JEENER

A partir de la courbe génératrice d'une surface de révolution, il est possible de mettre en équation certaines formes de fleurs d'une manière élémentaire. Grâce à une transformation sur la surface, on choisira le nombre et la forme des pétales.



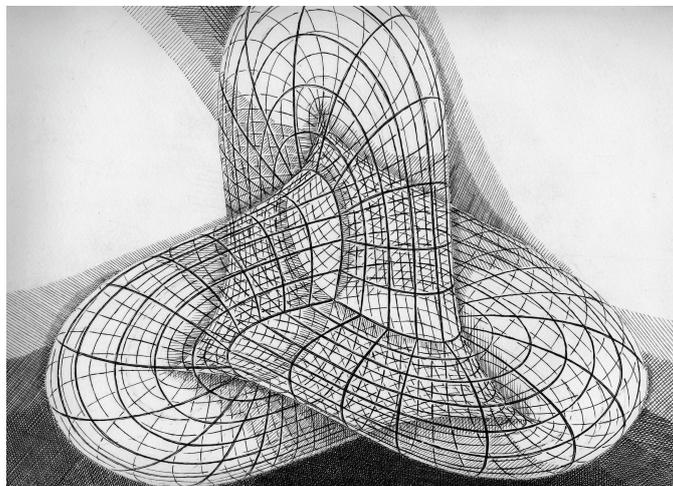
Le jardin des surfaces minimales. 2009.
Patrice JEENER

Les formules de Weierstrass permettent d'écrire les équations d'une infinité de surfaces minimales. Cette famille de surfaces a la symétrie d'un polygone régulier. Leurs bords sont déterminés, ici, à partir de courbes fermées ; elles peuvent ressembler ainsi à des fleurs.



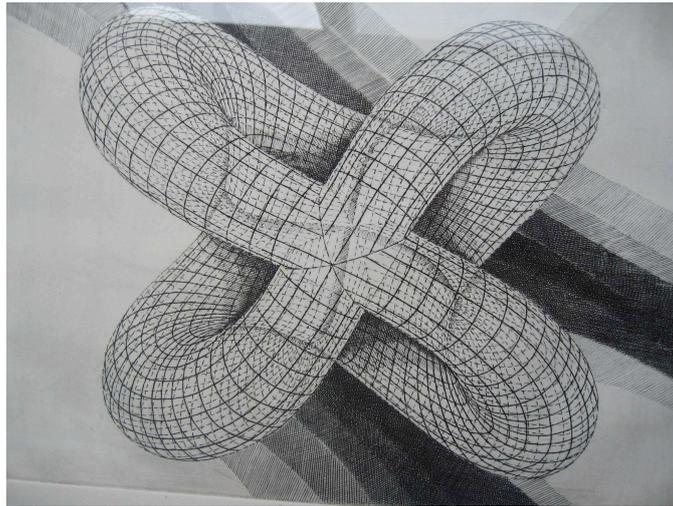
**Surface minimale "en olivier". 2008.
Patrice JEENER**

Les surfaces minimales à trois périodes sans auto-intersection ont des applications dans différents domaines de la physique et de la biologie. A partir du bois d'olivier, il a paru intéressant de représenter ces surfaces avec d'autres matières.



**Surface de Boy. 2002.
Patrice JEENER**

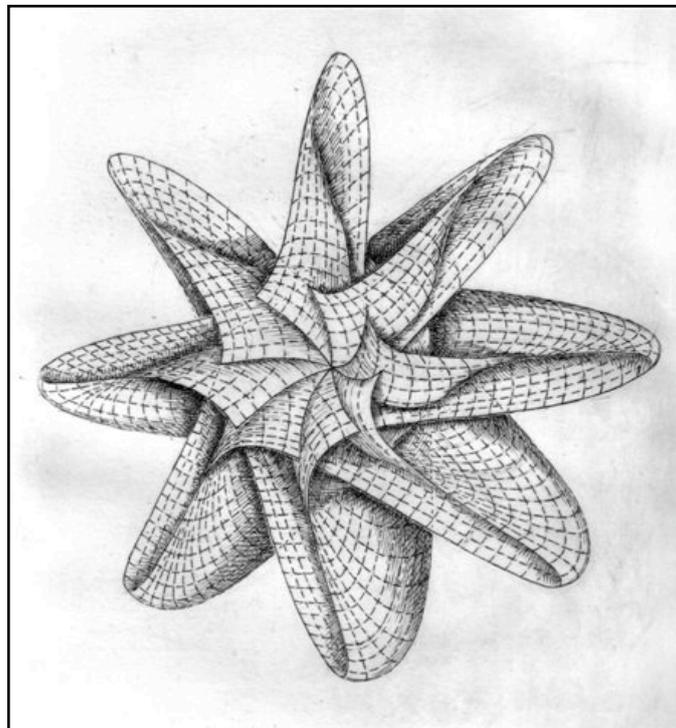
Découverte en 1902, cette surface, ayant même propriété de connexité que la sphère, ne possède qu'une seule face, d'où son rôle dans le retournement de la sphère



La surface de Morin. 2008.

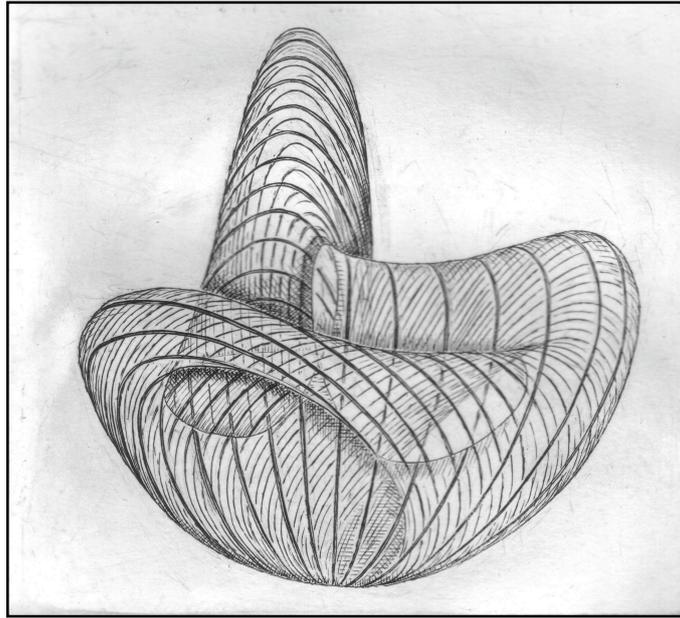
Patrice JEENER

Ici en gravure (cf. la représentation métallique de François Apéry)

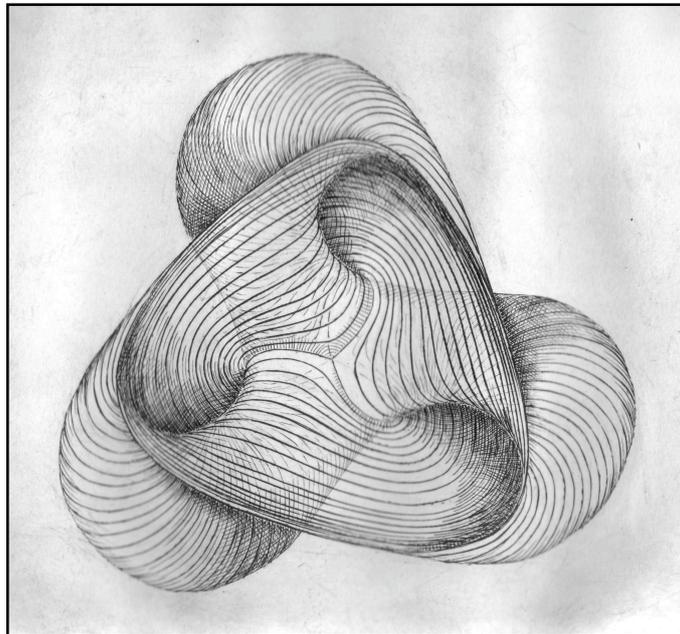


Morin 8. 2008.

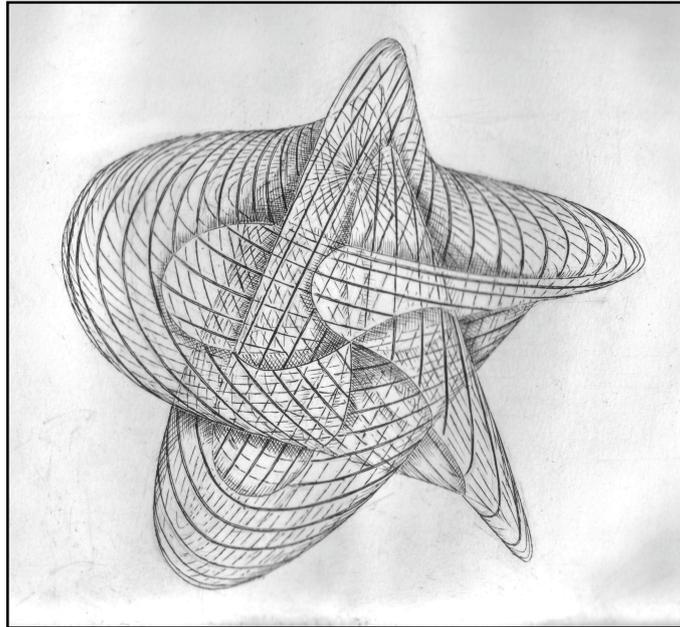
Patrice JEENER



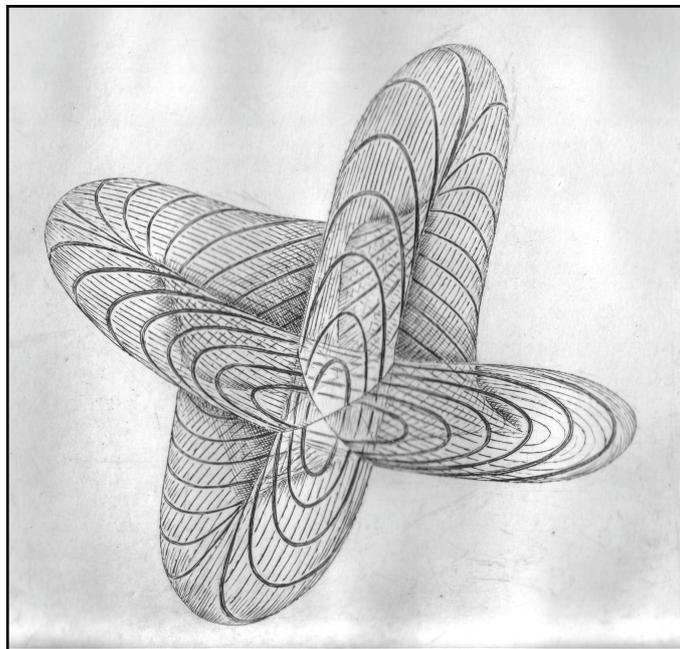
**Boy 3002. 2010.
Patrice JEENER**



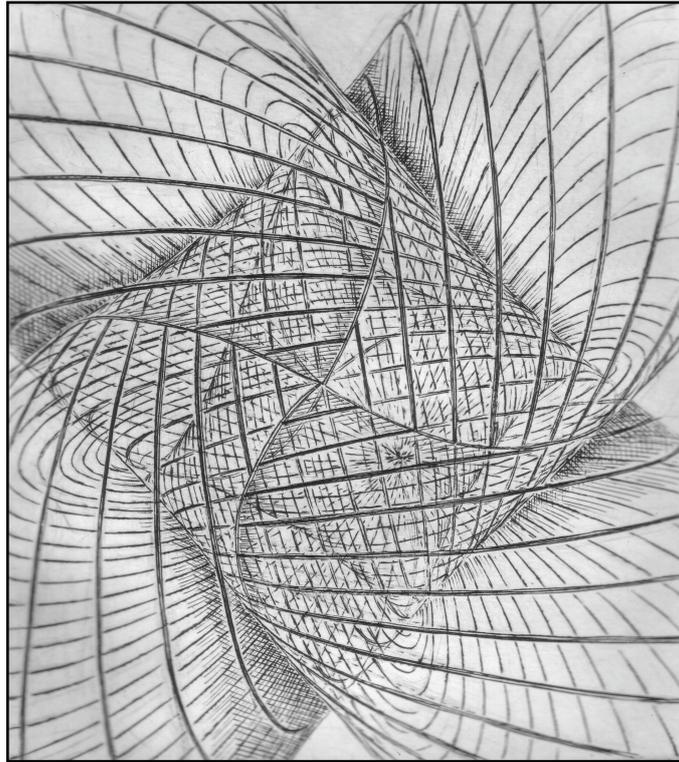
**Intérieur de Boy. 2010.
Patrice JEENER**



**Boy 5008. 2010.
Patrice JEENER**



**Boy Modèle ouvert 0004. 2010.
Patrice JEENER, 2010**

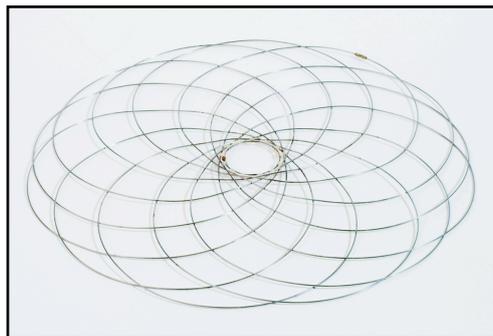


**Boy Modèle fermé 0007. 2010.
Patrice JEENER**

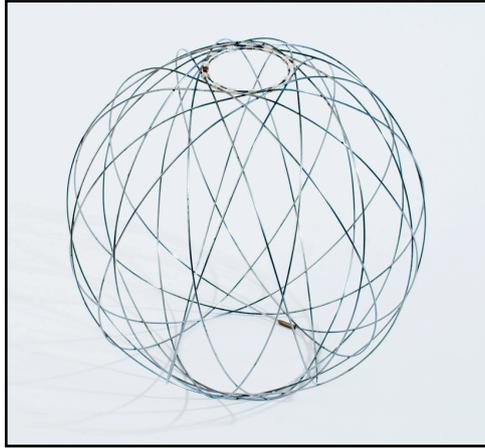


Dmitri KOZLOV

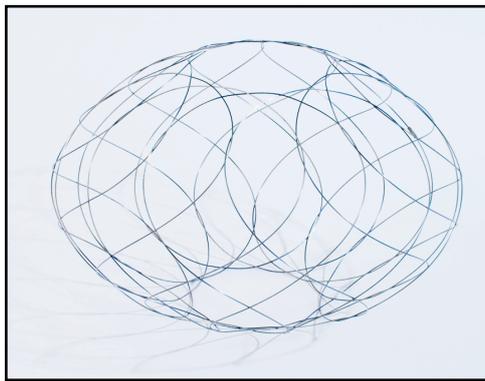
Ph.D., architecte, designer et chercheur, il a travaillé de 1986 à 1999 au Laboratoire d'Architecture Bionique à Moscou. Il est maintenant en poste à l'Institut de Recherche sur la Théorie et sur l'Histoire de l'Architecture et de l'Aménagement des villes, une section de l'Académie Russe de l'Architecture et des Sciences de la Construction. Il s'intéresse tout particulièrement aux applications des principes naturels de génération des formes à l'art, le design et l'architecture. Dmitri Kozlov est auteur d'inventions dans le domaine de l'architecture bionique.



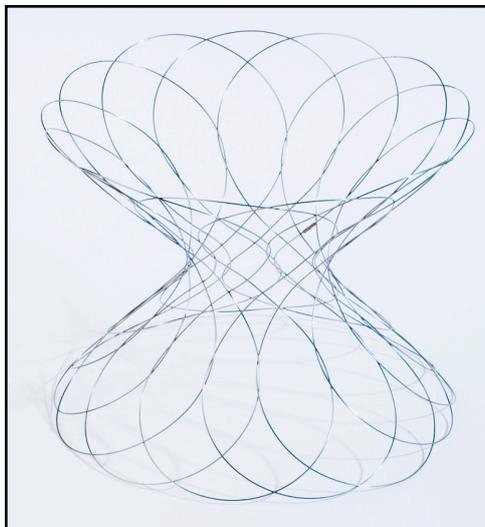
**Une structure nouée comme modèle de surface déformable à l'état plane.
Dmitri KOZLOV**



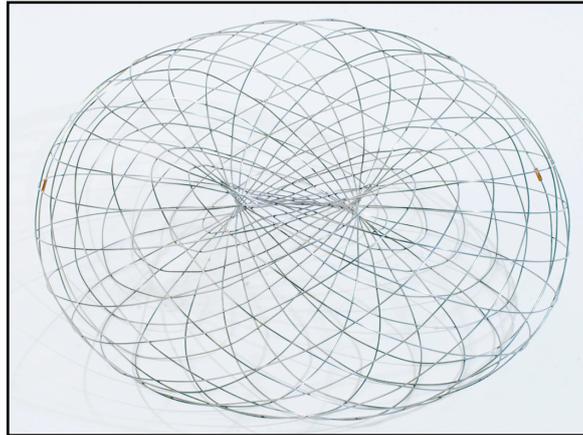
**La même structure au stade sphérique.
Dmitri KOZLOV**



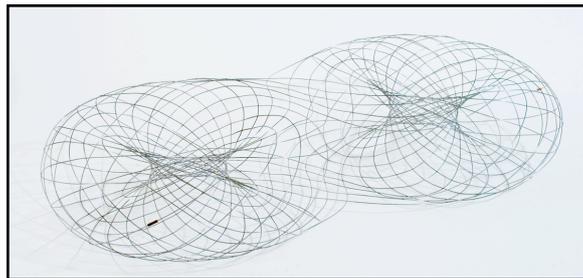
**Une structure nouée comme modèle de surface de forme elliptique.
Dmitri KOZLOV**



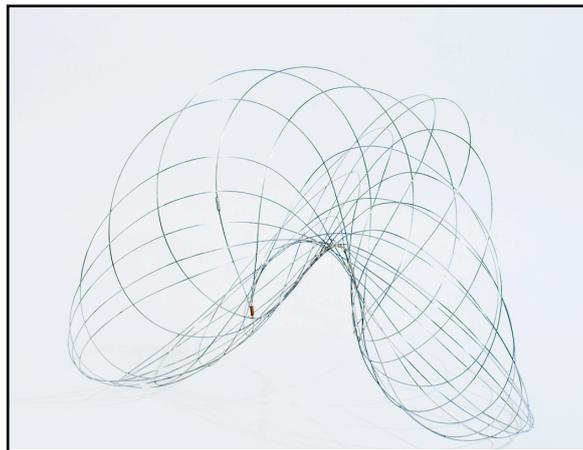
**La même structure mais retournée comme modèle de surface hyperbolique.
Dmitri KOZLOV**



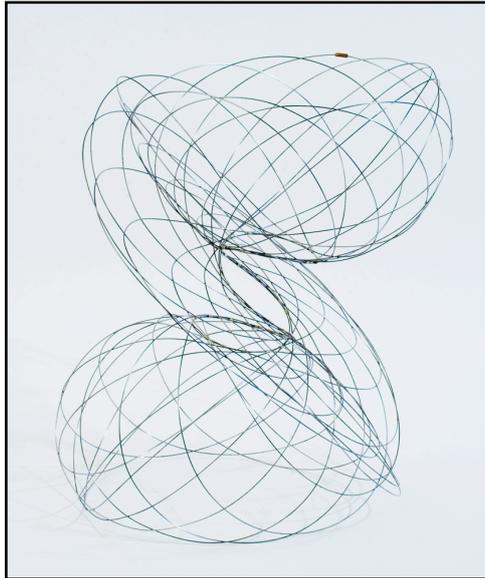
**Surface d'un tore en tant qu'enlacement de deux nœuds toriques symétriques.
Dmitri KOZLOV**



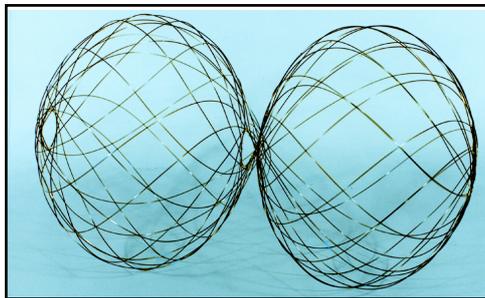
**Surface d'un bretzel en tant qu'enlacement de deux nœuds en forme de bretzels
symétriques.
Dmitri KOZLOV**



**Une structure nouée comme modèle de surface à une seule courbe d'auto-intersection.
Dmitri KOZLOV**

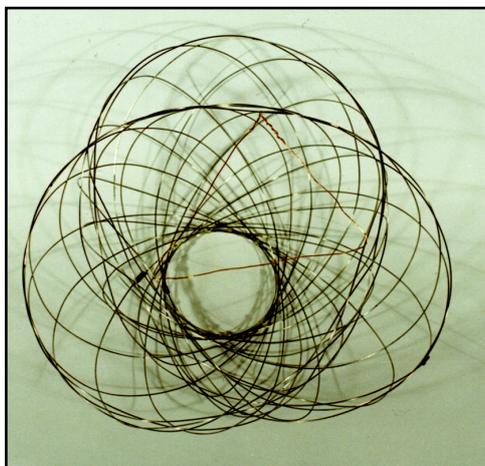


**Surface d'un tore comme modèle de surface ayant deux courbes de self-intersection.
Dmitri KOZLOV**



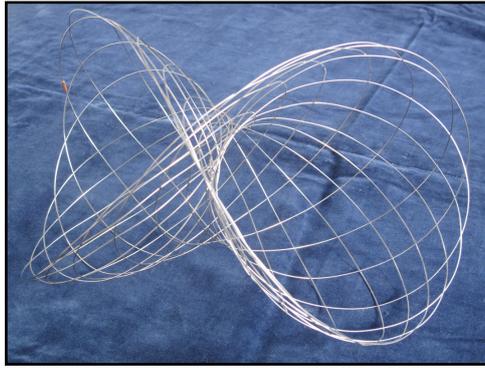
**Une structure nouée avec une courbe de self-intersection comme modèle d'une double
sphère.**

Dmitri KOZLOV



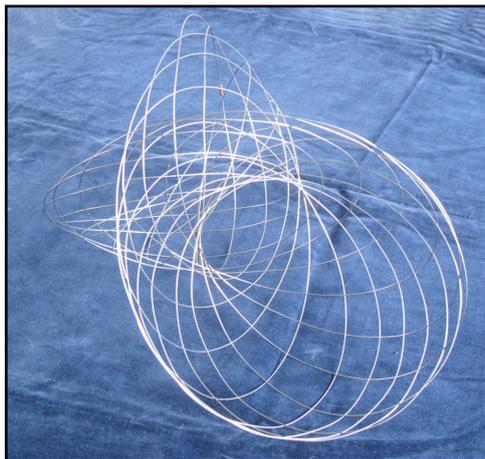
**Une structure nouée comme modèle de surface avec trois courbes d'auto-intersection en
forme de nœud de trèfle.**

Dmitri KOZLOV



Une structure nouée comme modèle de surface unilatère ayant une courbe de self-intersection.

Dmitri KOZLOV



La même surface unilatère prise d'un autre point de vue: son bord est une figure à 8 courbes.

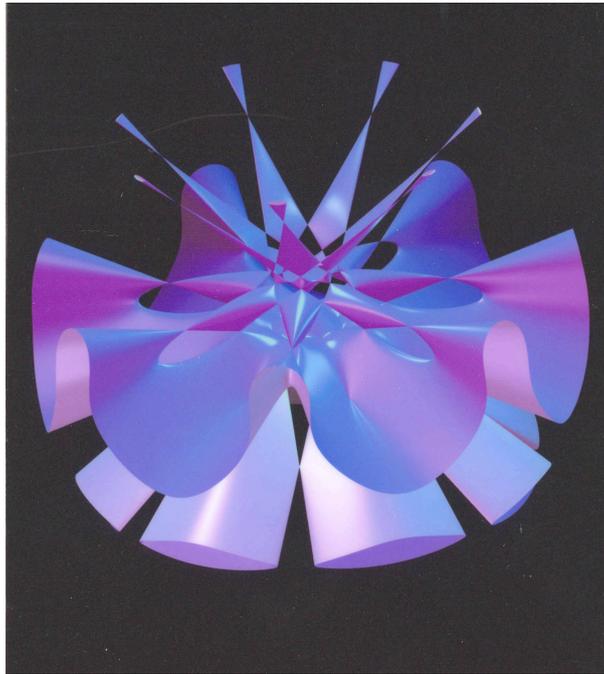
Dmitri KOZLOV



Oliver LABS

Les travaux d'Oliver Labs, mathématicien à l'Université de la Sarre, portent sur la géométrie algébrique algorithmique, la théorie des singularités et leurs applications, notamment à la visualisation. Il a en particulier développé différents programmes, dont, en collaboration avec d'autres co-auteurs, les programmes Surfex and Surfer.

<http://www.imaginary2008.de/surfer.php>



**Septique de Labs.
Oliver LABS**

Cette septique possède la symétrie d'un polygone régulier à 7 côtés et 99 singularités. Il existe toute une famille de septiques à 99 singularités, dépendant de 5 paramètres. Oliver Labs a développé un logiciel « Singular » particulièrement adapté à la représentation des surfaces algébriques.



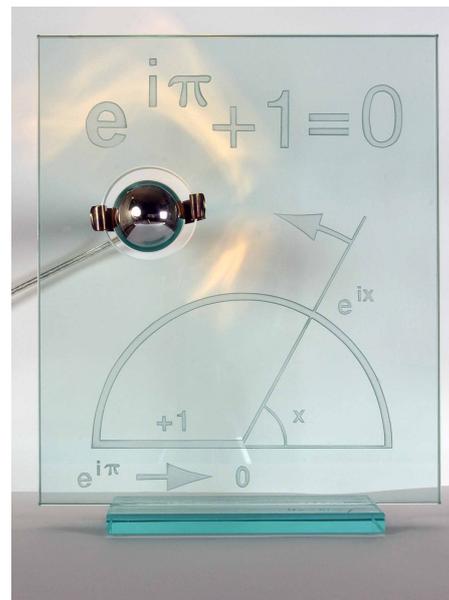
Hervé LEHNING

Hervé Lehning est éditeur en chef de “Tangente”, un magazine français consacré à la popularisation des Mathématiques. Depuis 2007, il façonne des objets d'art avec le même objectif.

<http://www.lehning.eu>



Lampe Klein.



Lampe Euler.

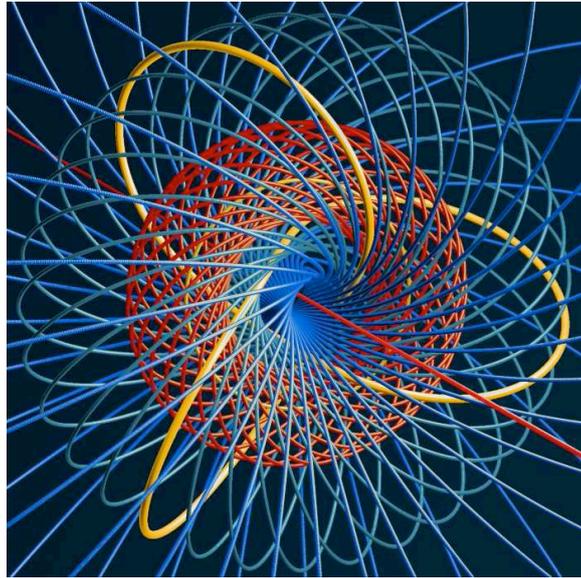
Hervé LEHNING



Jos LEYS

Né en 1952 à Niel (Belgique). Ingénieur dans l'industrie chimique occupant d'importants postes de responsabilité, il quitte l'industrie en 2005, et peut alors s'adonner corps et âme à sa passion de l'art mathématique. Povray et Ultrafractal sont ses principaux outils informatiques de création. Artiste recherché par la communauté mathématique internationale, il est notamment renommé pour avoir remarquablement tiré parti de l'ouvrage de David Mumford « Indra Pearls » (Cambridge University Press), et pour avoir visualisé avec art les travaux d'Etienne Ghys, permettant ainsi à celui-ci de compléter son étude.

<http://www.josleys.com>



Seifert Fibration. 2007.
Jos LEYS

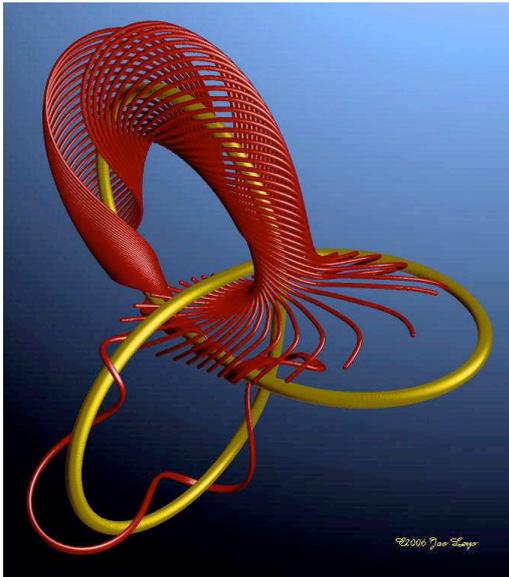
Projection stéréographique partielle de la sphère de dimension 3 feuilletée à la Seifert en nœuds de trèfles et deux cercles : un nœud de trèfle est une courbe fermée sur elle-même comme celle colorée en jaune. Il est possible de pratiquement remplir notre univers apparent et la sphère de dimension 3 (ici projetée stéréographiquement dans notre espace usuel) avec des nœuds de trèfle qui ne se touchent pas. L'image montre une petite collection de ces nœuds.



L'attracteur de Lorenz. 2006.
Jos LEYS

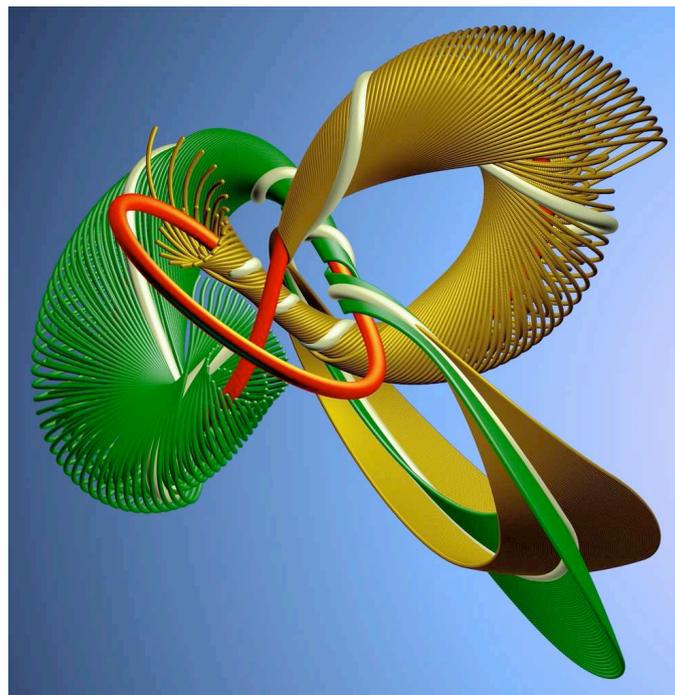
En 1963, le météorologue Lorenz établit un modèle simplifié pour l'étude des phénomènes de convection dans l'atmosphère. Les solutions obtenues illustrent l'effet « papillon » prévu par

Poincaré. L'image montre un ensemble de trajectoires ayant une forme voisine de celles des nœuds de trèfle et qui tendent à s'approcher d'un domaine appelé un attracteur étrange.

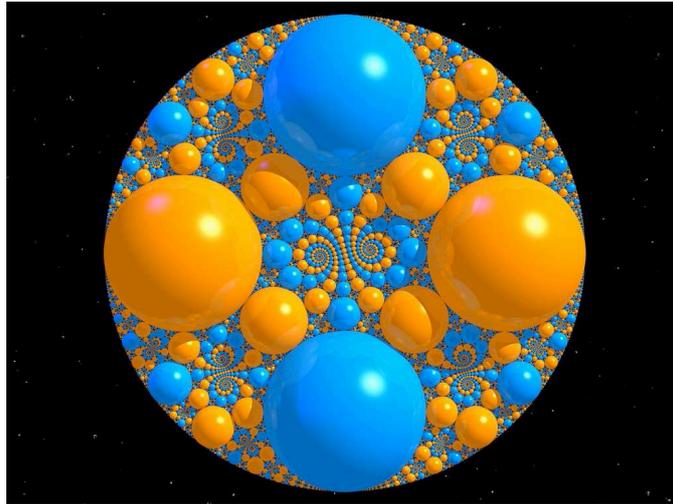


Real Matrix. 2006
Jos LEYS

Les attracteurs des systèmes dynamiques sont des trajectoires fermées sur elles-mêmes vers lesquelles convergent ou d'où s'échappent les autres trajectoires. L'attracteur est ici un nœud de trèfle de couleur or.

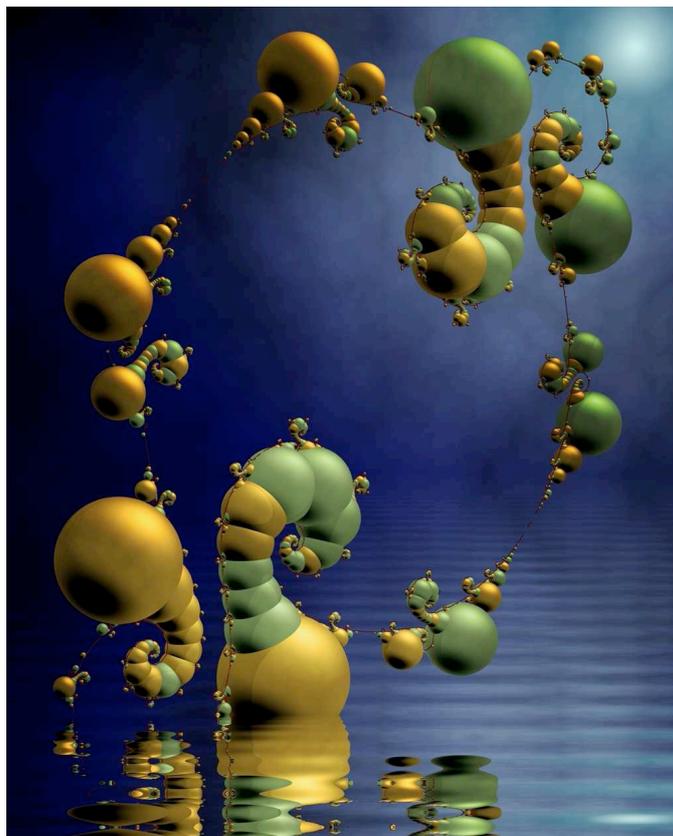


Notices. 2006.
Jos LEYS

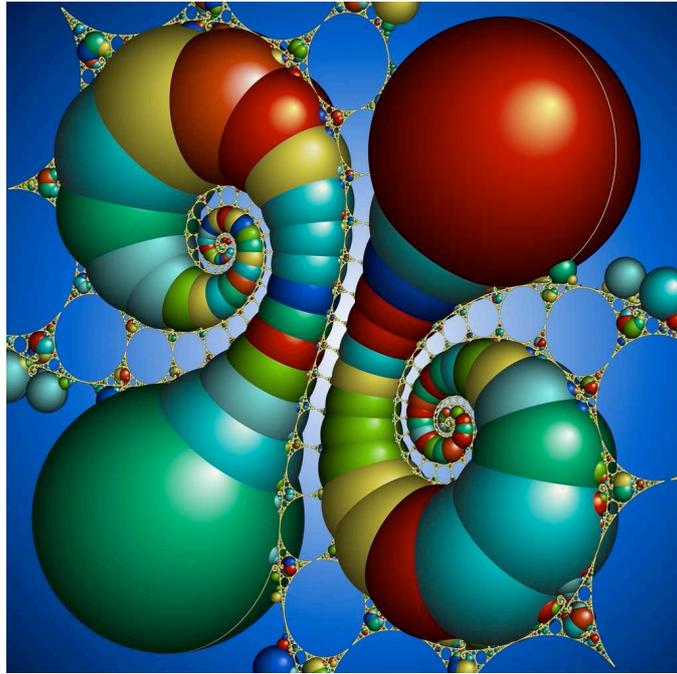


1 on 15 cusp. 2007.
Jos LEYS

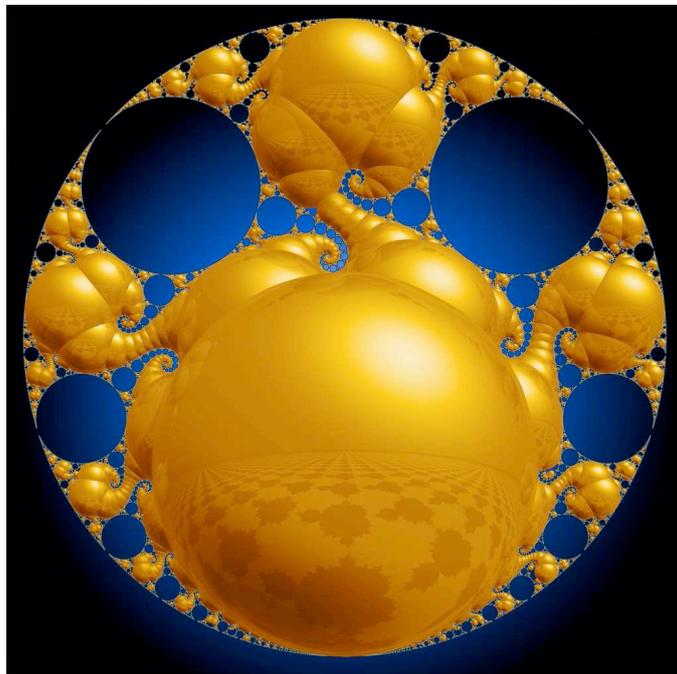
Les réflexions successives dans des miroirs sphériques peuvent engendrer des figures remarquables. « **Indra's Pearls** », un livre de David Munford, Caroline Series et David Wright, décrit les mathématiques de la "réflexion de tout l'univers" dans les perles de la déesse indienne Indra. Ces mathématiques font appel aux nombres complexes et aux transformations d'Euler-Moebius qui préservent les cercles et les sphères. Cette œuvre et les deux autres qui suivent (**Indra Family, Balloons, Pandora**) ont été créés par le même algorithme.



Indra family. 2004.
Jos LEYS



Balloons. 2004.
Jos LEYS

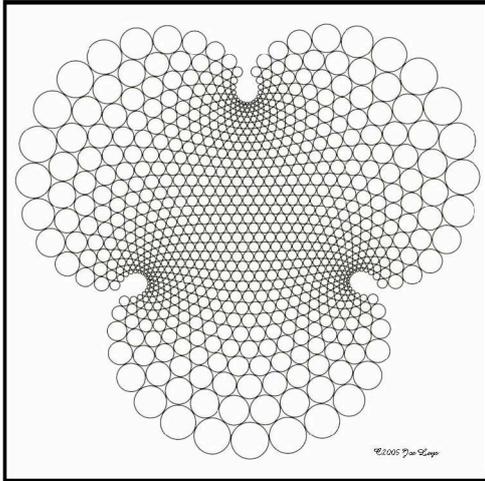


Pandora. 2004.
Jos LEYS

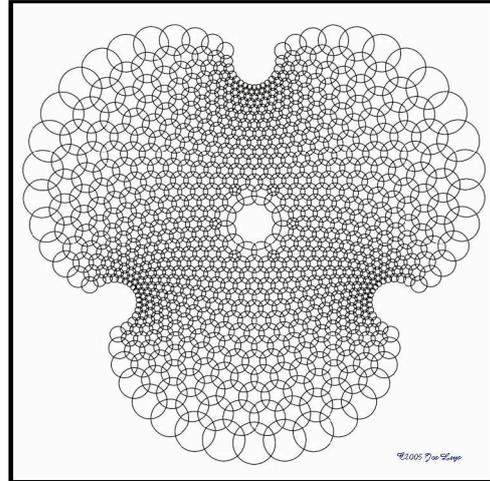
Les empilements de cercles

Dans les images précédentes de la série "Indra", on rencontre des familles de cercles ou de sphères qui se touchent et que je trouve fascinantes. J'ai alors cherché d'autres méthodes pour dessiner de telles familles, et j'ai découvert le travail de Ken Stephenson de l'Université de Tennessee. Il a décrit une méthode itérative pour ajuster les rayons d'une collection de cercles

de sorte qu'ils se touchent tous d'une façon imposée (nombre des cercles adjacents à un cercle donné, angles entre les rayons de deux cercles adjacents, etc..). Il en résulte des images dont certaines peuvent sans doute être matérialisées par des sculptures, un travail peut-être coûteux. Restons donc avec les images. Il est d'innombrables manières de combiner des cercles, mais ce qui m'a beaucoup plu, c'est de prendre des pavages de Penrose, et de les remplir avec des cercles. Cela donne des images qui parfois donnent un peu le vertige au spectateur... (J.L.)

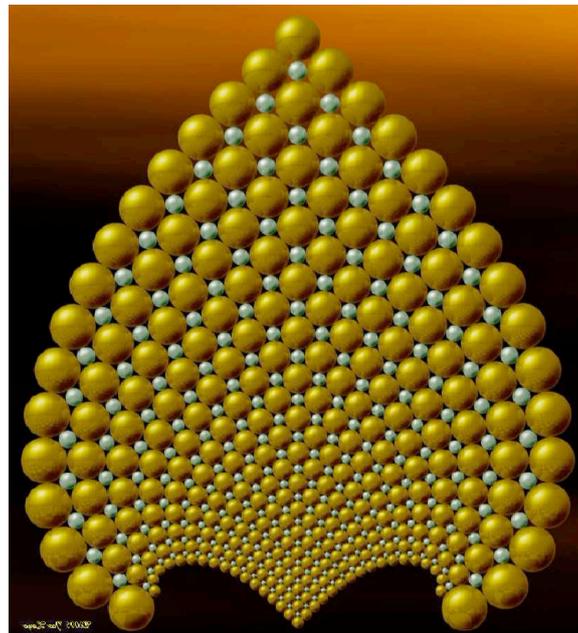


Circle collection 1. 2005.



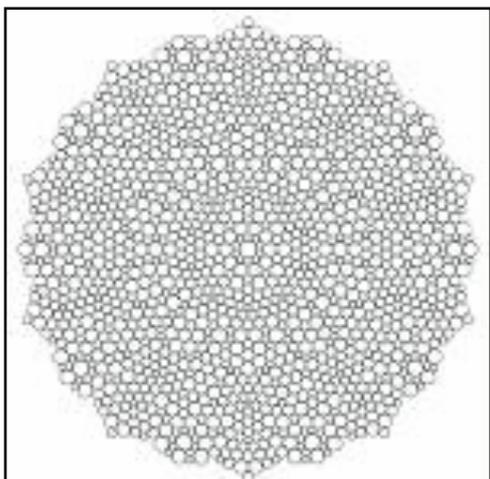
Circle collection 2. 2005.

Jos LEYS

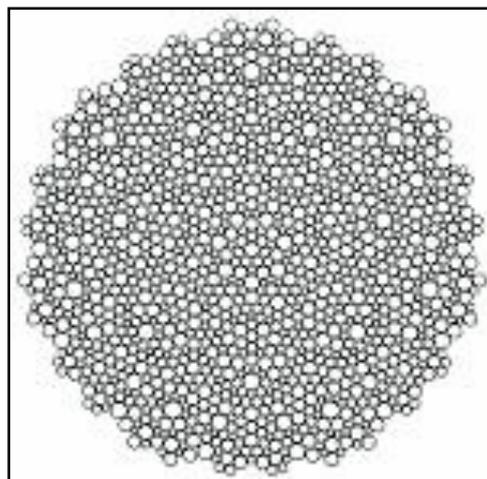


Spearhead. 2005.

Jos LEYS



Penrose circles 1. 2005.



Penrose circles 2. 2005.

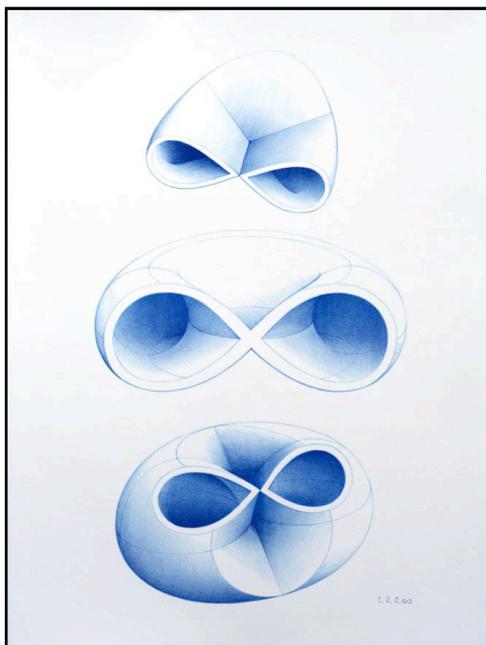
Jos LEYS



Sylvie PIC

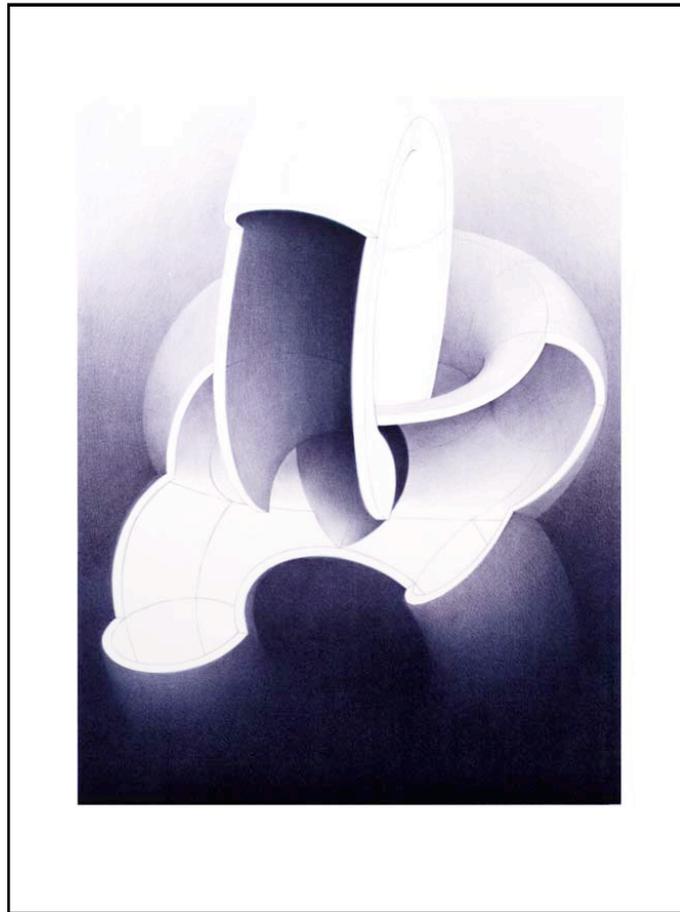
Née en 1957, Sylvie Pic est diplômée de l'Ecole des Beaux Arts de Marseille, où elle réside. Son travail est centré sur l'espace réel (l'architecture), ou représenté (géométrie, topologie) jusqu'aux confins de l'abstraction. Elle expose en France, aux Etats-Unis, au Canada.

<http://www.documentsdartistes.org/pic>



Trois Tores. 2007.

Sylvie PIC



1, 2, 3 l'infini. 2007.
Sylvie PIC



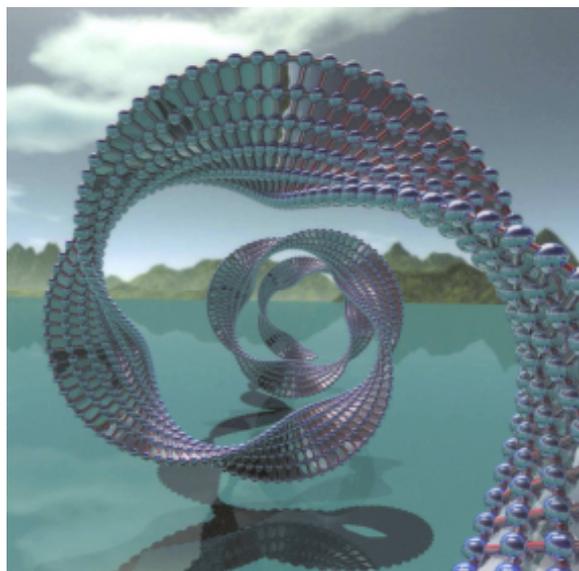
Ulrich PINKALL

Depuis 1986, enseigne la géométrie différentielle et la visualisation à la Technische Universität de Berlin, dirigeant avec John Sullivan le groupe de travail sur la « Visualisation Mathématique » au sein de l'unité de recherche Matheon, liée à leur visualisation. Son principal domaine d'activités est la géométrie différentielle des surfaces.



Surface de Boy.
Ulrich PINKALL

Cette surface non orientable, qui apparaît dans le retournement de la sphère, est une représentation sans singularité de l'espace projectif à deux dimensions dans l'espace usuel. Elle est ici à courbure moyenne minimale (représentée selon la paramétrisation de Robert Bryant et Robert Kusner).



Surface de Björling.
Ulrich PINKALL

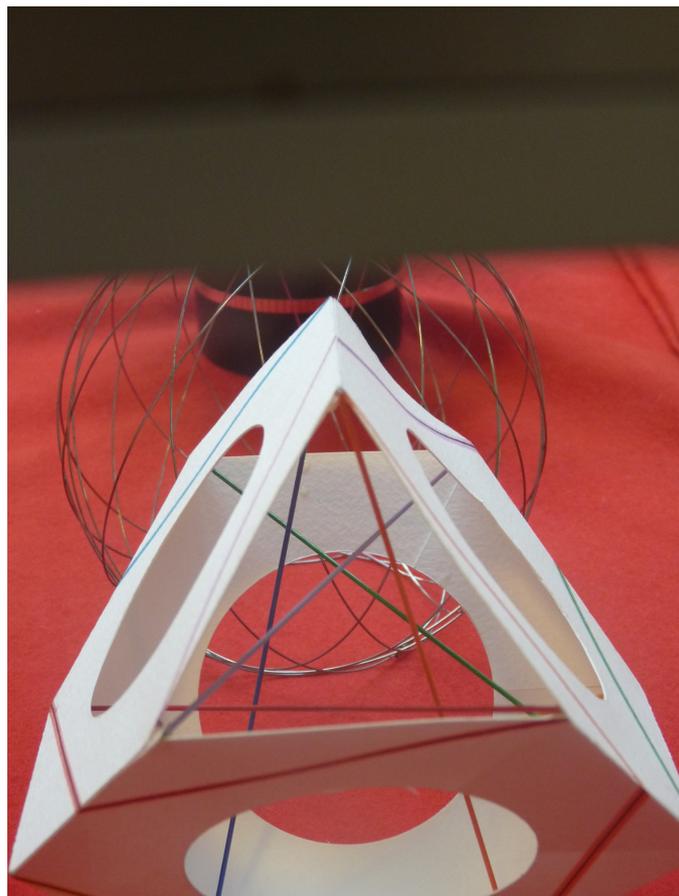
En 1844, E.G. Björling a montré qu'un élément de courbe peut être plongé dans une bande de

surface minimale. La courbe est ici une hélice, le long de laquelle la bande se vrille à vitesse constante. Matthias Weber a fourni les formules permettant de calculer cette surface particulière de Björling, le décor qui l'entoure est dû à Simon O'Callaghan: une œuvre de l'équipe Matheon.

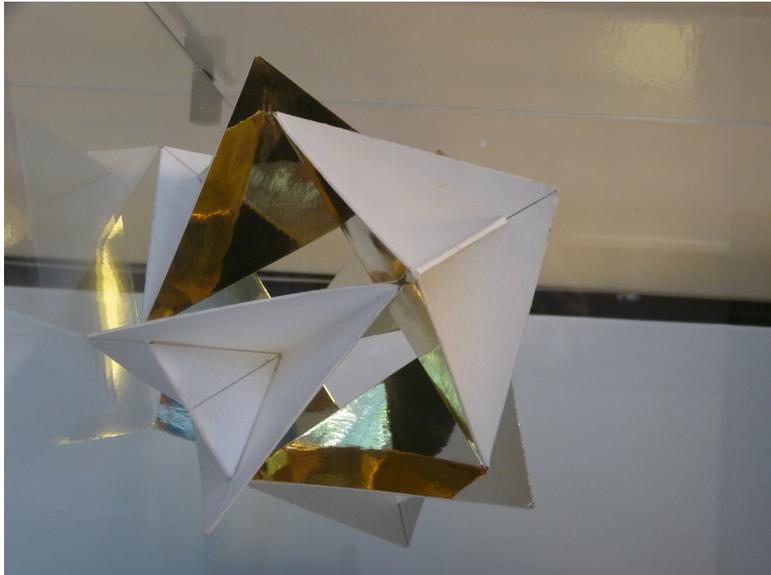


Philippe RIPS

Artiste plasticien, né à Paris en 1953. Diplômé de l'Institut d'Urbanisme de l'Université Paris 8, ses recherches portent sur les structures auto-tendues à la Snelson pour l'auto-construction et la réalisation de mobiliers. Ses études visent à la création d'objets d'art cinétique en insufflant le facteur temps au sein d'objets géométriques à substrat polyédrique en particulier.



**Masque platonicien (piscis - evocatio). 2008.
Philippe RIPS**



**Sans titre. 2010.
Philippe RIPS**



**Boy feuilleté en nœuds de trèfles. 2008.
Philippe RIPS**

Sur une idée de Claude Bruter, le feuilletage (avec singularités) de la surface de Boy par des nœuds de trèfle.



**Intérieur prismatique du cuboctaèdre. 2008.
Philippe RIPS**



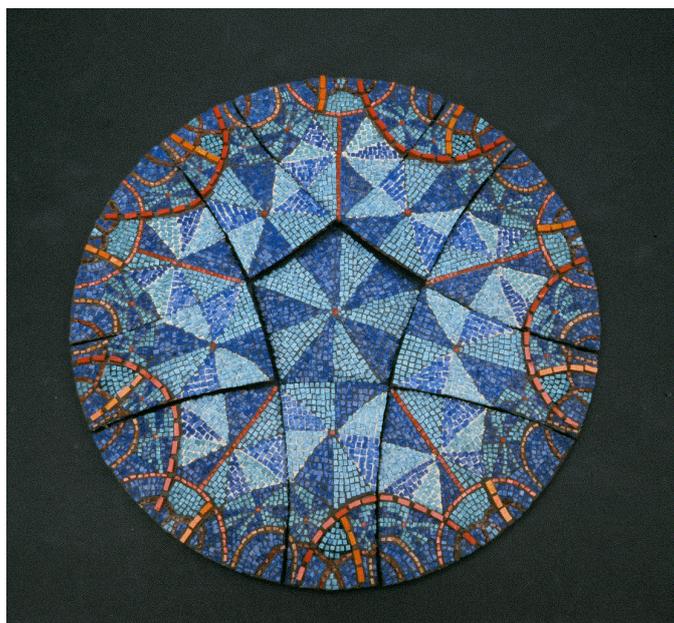
**Le cuboctaèdre en ses nœuds simples. 2008.
Philippe RIPS**



Irène ROUSSEAU

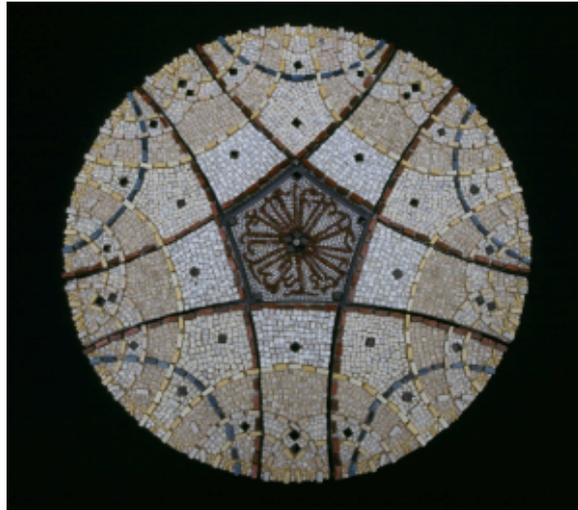
Plus d'une quinzaine de grands musées à travers le monde possèdent une œuvre d'Irène Rousseau dans leurs collections. Citons le National Museum of Contemporary Art de la Smithsonian Institution à Washington, le Museum of Modern Art, le Guggenheim et le Whitney Museum à New York, le British Museum, la Galerie Nationale d'Art à Rome, et MAMCO, le musée d'art contemporain de Genève. Elle a reçu la Presentation Design Award de l'American Institute of Architect. Elle a fait ses études à l'université de Claremont en Californie où elle obtint un MFA, puis à l'université de New York où elle obtint un Ph.D. en Interdisciplinary Studies.

Son œuvre diffère de celle de nombreux artistes travaillant la mosaïque en ce sens qu'elle modèle des sculptures multidimensionnelles provenant de surfaces concaves. Faisant appel à des concepts mathématiques, les sculptures hyperboliques semblent « flotter sur les murs, défiant la substance matérielle ».



Mosaïque hyperbolique I.
Irène ROUSSEAU

En tant qu'artiste, non mathématicienne, mon œuvre vient de ma sensibilité à l'esthétique de la forme géométrique, qui sous-tend la cohérence mathématique à l'arrière-plan du monde naturel. Quand on regarde la nature, on voit des motifs, des « patterns ». J'emploie ce terme dans un sens métaphorique pour désigner la structure et l'ordre formel caché des systèmes spatiaux que l'on rencontre dans la nature.



Mosaïque hyperbolique II.
Irène ROUSSEAU

Mes sculptures sont construites à partir de motifs marquetés sous formes de mosaïques. Les pièces ou *tesserae* sont assemblées sur des surfaces courbées, selon des motifs inspirés par la géométrie hyperbolique. Pour les peintures faites sur des surfaces planes, les pièces sont remplacées par des petites tâches. Leur perception visuelle donne l'illusion d'épaisseur de l'espace tridimensionnel.



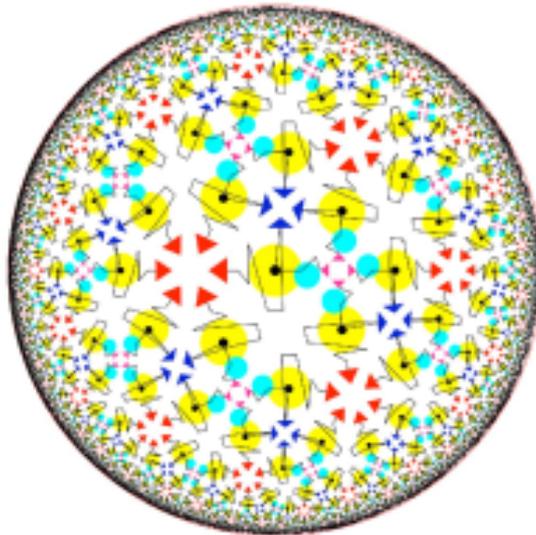
Mosaïque hyperbolique III.
Irène ROUSSEAU

Ces sculptures et peintures sont mes véhicules d'expression des rythmes et des énergies "présents dans l'univers". En employant la licence artistique, ils représentent du point de vue métaphorique le concept de la petitesse infinie au sein d'une structure finie



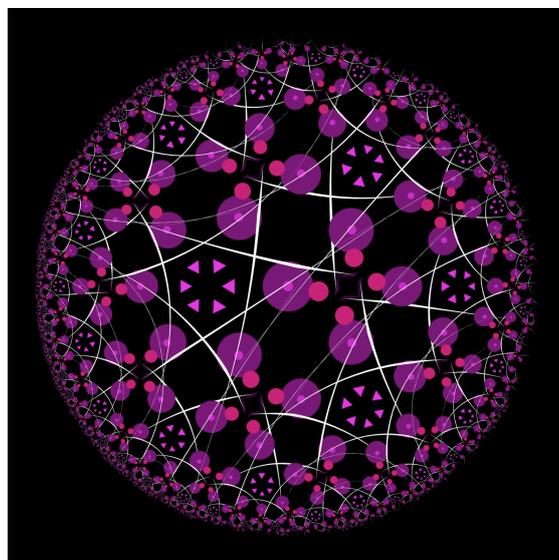
Radmilla SAZDANOVIC

PhD en mathématiques de l'université George Washington et postdoc au MSRI, à Berkeley, au printemps 2010. Ses recherches portent sur la théorie des nœuds, les structures de la combinatoire. Co-auteur avec Slavik Jablan du livre "**LinKnot**", elle a obtenu la GWU Presidential Merit Fellowship, les Marvin Green Prize et James H. Taylor Graduate Mathematics Prize. En 2002, elle rejoint la communauté artistique inspirée par les riches structures géométriques présentes dans les pavages du plan hyperbolique et dans ses recherches en théorie des nœuds.



Hyperbolic Klee. 2003.
Radmilla SAZDANOVIC

Cette œuvre repose sur un pavage uniforme de type $(4, 4, 4, 6)$ du plan hyperbolique dont la structure a été enrichie par l'introduction d'un motif coloré asymétrique.



Poincaré Berries. 2009.
Radmilla SAZDANOVIC

Cette œuvre, consistant de triangles et de cercles introduits dans le domaine fondamental, met en valeur les symétries par rotation d'ordre 4 et 6 du pavage (4, 4, 4,6) du plan hyperbolique.



John SULLIVAN

Aujourd'hui professeur de Mathématiques à la Technische Universität de Berlin, il obtint son PhD à Princeton en 1990, après ses premières études à Harvard et Cambridge. Ses travaux en géométrie portent sur la recherche de formes optimales pour les courbes et les surfaces plongées dans l'espace usuel, avec comme exemples les amas de bulles de savon minimisant leur aire, ou les nœuds en forme de corde le plus resserrée possible et minimisant leur longueur. Il a fait appel de manière extensive à l'emploi de l'ordinateur pour illustrer à travers ses travaux l'art mathématique.

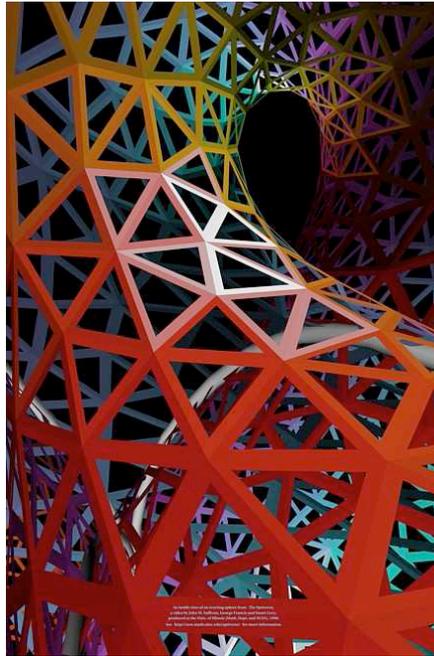


119 Bubbles. 1990.

John SULLIVAN

Digital print, 20" x 20"

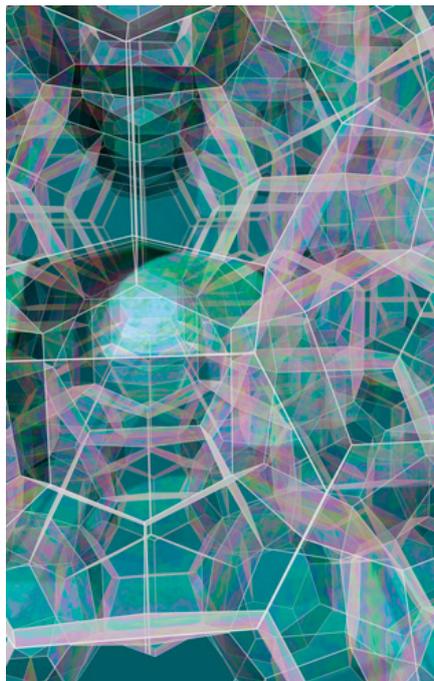
"119 Bubbles" montre la projection stéréographique du polytope régulier dans l'espace à quatre dimensions désigné sous le nom de code 120-cell, également illustré par Patrice Jeener. Il possède la géométrie exacte d'un accolement de bulles, l'une des 120 cellules représentant l'extérieur infini.



Optiverse: Framework Interior.
John SULLIVAN

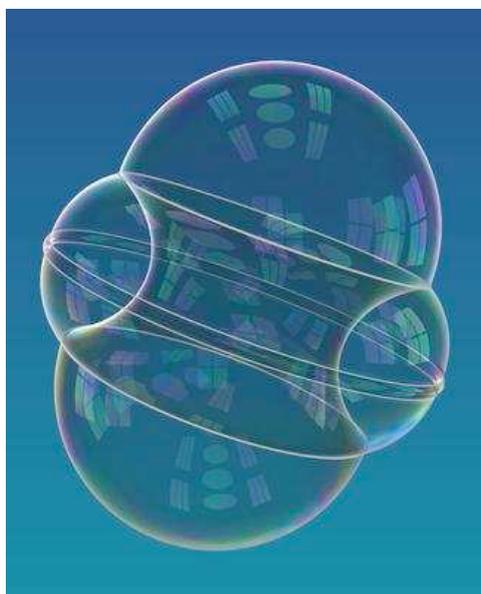
Cette image est extraite du film **Optiverse** où l'on suit le retournement de la sphère à énergie élastique minimale. On voit ici un morceau de la sphère en retournement dont la triangulation est faite par l'ordinateur. Le tube blanc indique la ligne le long de laquelle la surface se traverse elle-même (courbe de self-intersection de la surface).

<http://torus.math.uiuc.edu/optiverse/descr.html>



Foamy Partition : Weaire-Phelan.
John SULLIVAN

Foamy Partition : Weaire-Phelan donne une vue de l'intérieur d'une écume de savon. Une telle écume est généralement considérée comme une collection infinie de bulles de savon se touchant, chacune d'elles essayant de minimiser l'étendue de sa surface tout en maintenant fixe le volume d'air qu'elle contient. Dans les années 1880, Lord Kelvin considéra le problème de trouver l'écume dont les bulles identiques auraient le volume optimal. Il conjectura une solution dont la preuve fut recherchée pendant plus d'un siècle, jusqu'à ce qu'en 1994 les physiciens irlandais Weaire and Phelan découvrent la structure ci-dessus plus compliquée mais donnant aussi un résultat meilleur. Certaines de ces bulles ont la forme de dodécaèdres pentagonaux, mais d'autres ont quatorze faces.



Double Bubble Trouble. 1999.
John SULLIVAN

Double Bubble Trouble montre un accolement de bulles de savon dont l'équilibre physique est instable. L'accolement concerne trois bulles : une grosse bulle centrale, une moyenne bulle ceinturant la première, et une toute petite bulle ceinturant la seconde. Toutes les parois des bulles accolées font des angles de 120° . Ces images ont été créées pour illustrer la preuve de la conjecture générale sur les bulles doubles énoncée par Hutchings, Morgan, Ritore et Ross (2000).



Willmore Duel. 2004.
John SULLIVAN

"Willmore Duel" montre une surface dite de Wilmore, elle minimise l'énergie élastique de courbure. Elle est la surface duale de l'une de celle qui apparaît dans le film The Optiverse, où elle est utilisée pour réaliser le retournement de la sphère à énergie minimale. Les trois images, **Willmore Duel**, **Double Bubble Trouble** et **119 Bubbles**, ont été réalisées à partir de modifications du logiciel « Pixar's Renderman.



Minimal Flower 3. 2008
John SULLIVAN

La sculpture "Minimal Flower 3" a été mathématiquement conçue en tant que surface minimale. Elle représente une bulle de savon s'appuyant un contour métallique dont la forme est un nœud un peu compliqué. La tension superficielle maintient le film de savon rigide afin de minimiser son aire. La forme qui en résulte possède des symétries par rotation d'ordre 2 et 3, elle ne possède pas de symétrie miroir. Elle consiste en un domaine central ayant la forme d'une selle de cheval sur laquelle sont attachés trois rubans torsadés. Il s'agit donc, du point de vue topologique, d'une surface de Dyck trouée non orientable. Cette pièce est une manière d'hommage au sculpteur Brent Collins : son œuvre « Atomic Flower II » m'a incité à essayer de saisir à partir d'une surface minimale la même topologie et les mêmes symétries. La sculpture est fabriquée directement par une imprimante 3D à partir du logiciel de calcul. Au lieu d'épaissir la surface minimale de manière uniforme, on fabrique un objet plus fin près des bords et plus épais en son milieu en doublant le film de savon, et insufflant (virtuellement) de l'air entre les deux films ; les surfaces se faisant face sont par conséquent de courbure moyenne opposée en signe mais d'égale valeur absolue. (J.S.)

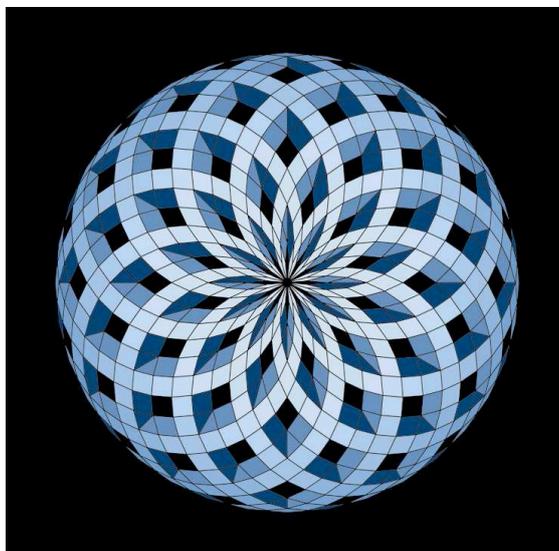


Minimal Flower 4. 2010.
John SULLIVAN



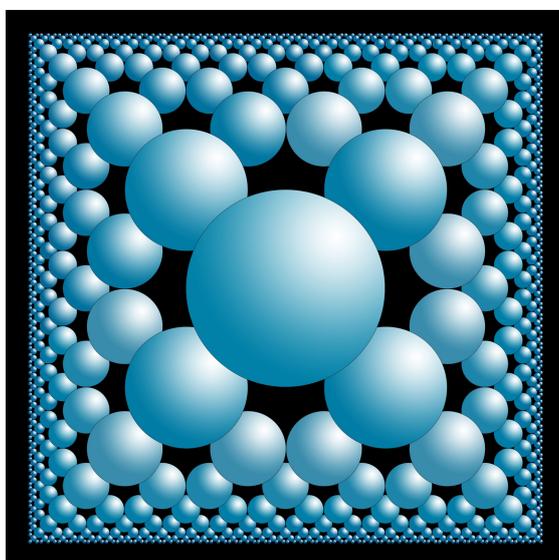
François TARD

Entre en 1958 à l'École Polytechnique, et en 1959 à l'École Nationale Supérieure des Beaux Arts de Paris (section architecture). Conseil en organisation, puis création et développement de petites entreprises (jeux éducatifs, imprimerie, infographie, édition). Créateur de jeux logiques. Passionné d'infographie, il illustre par plusieurs de ses œuvres les lois du découpage en losanges qui régissent les polygones réguliers.

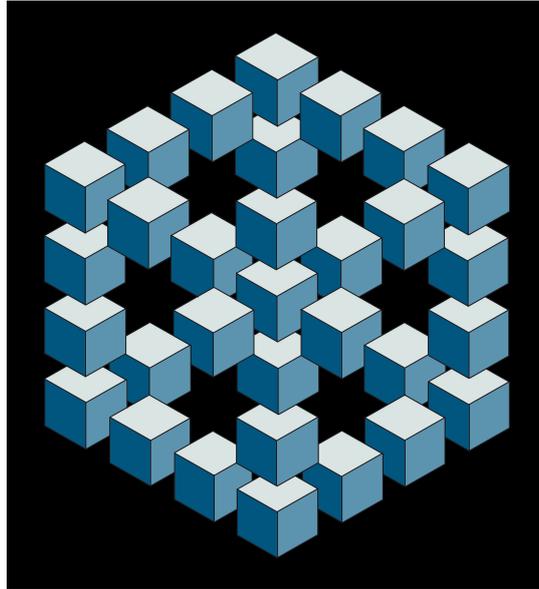


Rosace d'aurichalcite. 2009.
François TARD

Tout polygone régulier ayant un nombre pair de sommets peut être découpé en un nombre entier de "losanges équilatéraux" (losanges dont les côtés sont égaux). Dans la "rosace d'aurichalcite", un *hexatriacontagone* (polygone régulier de 36 sommets) est découpé en 616 "losanges équilatéraux". Le premier anneau central de losanges constitue une étoile à 36 branches. En conséquence, la figure de base porte le nom de "*rhombohexatriacontagonehexatriacontaclonique*".

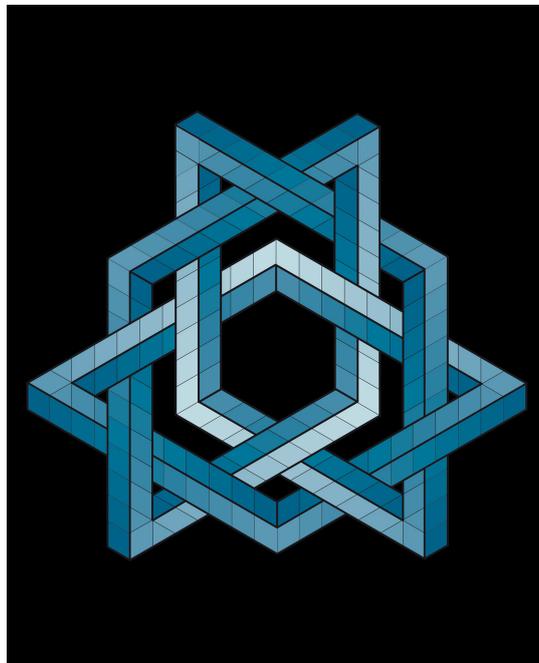


Fractale tétragonale de sphères. 2010.
François TARD



**Le Langage. 2009.
François TARD**

Les œuvres de Reutersvärd ont suggéré la construction de cet objet non euclidien



**Les trois cadres de la pensée. 2009.
François TARD**

Cette composition non-euclidienne illustre les paradoxes et les frontières dans lesquels se referme et s'enferme la pensée.



TERMES Dick

Sous l'influence de M.C. Escher et de Buckminster Fuller, Termes entreprit de peindre des sphères en 1968, alors qu'il obtenait son MFA à l'université du Wyoming. Il leur donna le nom de Termespheres. Il continua ses recherches dans cette direction et passa en 1971 sa thèse sur les Termesphere à l'Otis Art Institute de Los Angeles, où il reçut son diplôme de Masters of Fine Arts. Il n'a depuis guère quitté Black Hills dans le Dakota du Sud. Ses peintures sur sphères, plus de 160, ont fait le tour du monde, depuis San Francisco jusqu'à Paris, depuis New York jusqu'à Tokyo.

Chaque sphère est l'exploration et la représentation d'un univers clos. Ce que vous voyez quand vous regardez une Termesphere est une illusion d'optique, une vue depuis l'intérieur de la totalité du monde physique qui l'entoure. Elle vous paraîtrait normale si vous étiez effectivement à l'intérieur de la sphère, mais vous voyez cette vue intérieure depuis l'extérieur de la sphère. Elle est d'ailleurs en général peinte de l'extérieur, selon une technique mise au point par Termes : elle consiste à introduire un système de six points de perspective, qui correspondent aux centres des six faces d'un cube.

www.termespheres.com



**The Paris Opéra. 1992.
Dick TERMES**

Séjour parisien en 1992. Six jours de présence sur le grand escalier ont accompagné la réalisation de cette sphère. Elle est maintenant la propriété de Dave Ellis, Rapid City, SouthDakota.



Sainte Chapelle. 1993.
Dick TERMES

Pour réaliser la SAINTE CHAPELLE, je me suis projeté d'une dizaine de mètres au-dessus du sol pour me permettre de voir les merveilleux vitraux et les incroyables ornements que vous ne pouvez pas admirer quand vous êtes noyé dans la masse des visiteurs. Cette sphère est maintenant la propriété de Anne et Gayle Verret, de Floride.



Miroslav ZEC

Il débute sa vie professionnelle dans la photographie et devient en 1999 le photographe et le graphiste de la revue "Ribolovacki Trofej". Il s'est depuis entièrement consacré à l'illustration et au graphisme, parachevant ses études dans ce domaine auprès de l'université Metropolitain de Belgrade, et devenant responsable de ce secteur pour l'entreprise YUHUNG à Novi Sad.



EV-olution. 2007.
Miroslav ZEC

Le motif de base est asymétrique en forme de poisson. Il est représenté par un élément de courbe caractéristique, qui symbolise le mouvement continu circulaire sans fin présent dans la nature. Le motif est construit par l'union de deux lettres : la lettre "e" représente la tête et le corps du poisson, la lettre "v" en forme la queue. On fait appel au groupe de symétries p4 pour produire l'impression visuelle de mouvement circulaire sans fin. Ce groupe, engendré par les rotations d'ordre 4 et les translations, contient ainsi des éléments de symétrie dynamique. Il n'y a pas de réflexions, de sorte que ce décor possède deux formes énantiotropes, la gauche et la droite.



CONTACT

Claude Bruter bruter@univ-paris12.fr

<i>François APÉRY,</i>	f.avery@uha.fr
<i>Benno ARTMANN,</i>	artmann@uni-math.gwdg.de
<i>Boris ASSANCHEYEV,</i>	<i>4, rue des petits champs 75002 Paris</i>
<i>David AUSTIN, William CASSELMAN, David WRIGHT,</i>	david@merganser.math.gvsu.edu cass@math.ubc.ca wrightd@math.okstate.edu
<i>Tom BANCHOFF,</i>	tfb@cs.brown.edu
<i>Luc BÉNARD & Richard PALAIS,</i>	ludev2@gmail.com palais@uci.edu
<i>Anders BJÖRNER & Frank LUTZ,</i>	bjorner@mittag-leffler.se lutz@math.tu-berlin.de

<i>Philippe CHARBONNEAU,</i>	<u>charbonneauphilippe@neuf.fr</u>
<i>Jean-François COLONNA,</i>	<u>colonna@cmapx.polytechnique.fr</u>
<i>Jean CONSTANT,</i>	<u>jconstant@hermay.org</u>
<i>Richard DENNER,</i>	<u>richard.denner@evc.net</u>
<i>Tamás FARKAS,</i>	<u>f.farkastamas@freemail.hu</u>
<i>Mikael FIELD,</i>	<u>mikefield@gmail.com</u>
<i>Charles GUNN,</i>	<u>gunn@math.tu-berlin.de</u>
<i>George HART,</i>	<u>george@georgehart.com</u>
<i>Herwig HAUSER,</i>	<u>HerwigHauser@univie.ac.at</u>
<i>Slavik JABLAN,</i>	<u>sjablan@gmail.com</u>
<i>Patrice JEENER</i>	<u>patricejeener@wanadoo.fr</u>
<i>Dmitri KOZLOV</i>	<u>kozlov.dmitri@gmail.com</u>
<i>Oliver LABS</i>	<u>labs@math.uni-sb.de</u>
<i>Hervé LEHNING</i>	<u>lehning@noos.fr</u>
<i>Jos LEYS</i>	<u>jos.leys@pandora.be</u>
<i>Sylvie PIC</i>	<u>sylviepicartiste@aol.com</u>
<i>Ulrich PINKALL</i>	<u>pinkall@math.tu-berlin.de</u>
<i>Philippe RIPS</i>	<u>rips.philippe@club-internet.fr</u>
<i>Irène ROUSSEAU</i>	<u>mosaicartforms@comcast.net</u>
<i>Radmilla SAZDANOVIC</i>	<i>c/o</i> <u>sjablan@gmail.com</u>
<i>John SULLIVAN</i>	<u>Sullivan@Math.TU-Berlin.DE</u>
<i>François TARD</i>	<u>tard.francois@wanadoo.fr</u>
<i>Dick TERMES</i>	<u>termes@blackhills.com</u>
<i>Miroslav ZEC</i>	<i>c/o</i> <u>sjablan@gmail.com</u>

